This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

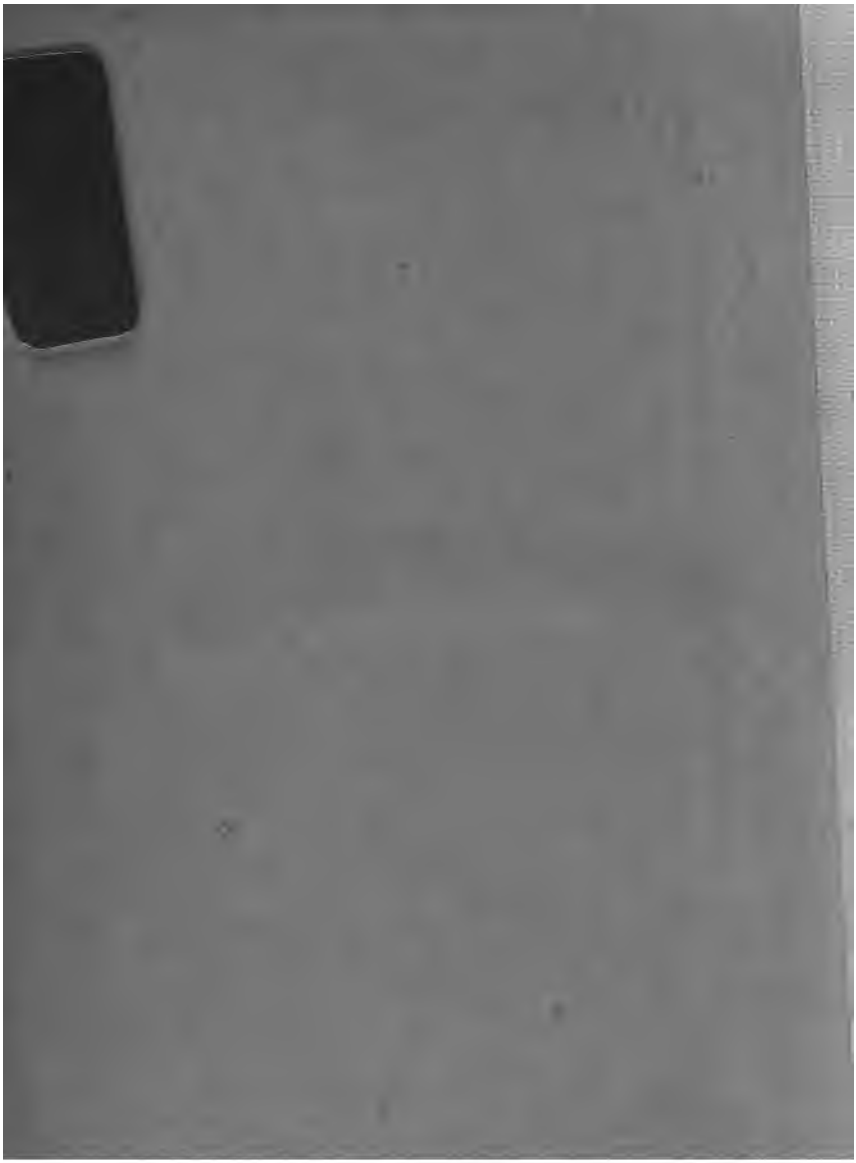
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910405 1



Verzeichnis

der erschienenen und projektierten Bände der

„Sammlung Schubert".

Erschienen sind bis Herbst 1900:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Mk. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. Mk. 4.80.

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.—.

„ VI: **Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Mk. 4.40.

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Mk. 5.—.

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 6.—.

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.—.

„ XII: **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Mk. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. Mk. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. Mk. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Mk. 8.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.40.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Band IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg.

„ V: **Niedere Analysis** von Prof. Dr. Herm. Schubert in Hamburg.

„ X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

„ XI: **Integralrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

Band XV: **Elemente der Astronomie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

„ XVI: **Mathematische Geographie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

„ XVII: **Anwendungen der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg.

„ XVIII: **Geschichte der Mathematik.**

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Ferd. Paul in Budapest.

„ XXI: **Dyanik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXII: **Technische Mechanik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXIII: **Geodäsie.**

„ XXIV: **Allgemeine Funktionentheorie** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

„ XXVI: **Räumliche projektive Geometrie.**

„ XXVII: **Geometrische Transformationen** von Dr. Karl Doehlemann in München.

„ XXVIII: **Theorie der höheren algebraischen Kurven.**

„ XXIX: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven I** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

„ XXX: **Elliptische Funktionen** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

„ XXXI: **Hyperelliptische und Abelsche Funktionen** von E. Landfried in Strassburg.

„ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen.**

„ XXXIII: **Invariantentheorie** von Dr. Jos. Wellstein in Strassburg.

„ XXXIV: **Liniengeometrie** von Dr. Konrad Zindler in Wien.

„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie.**

„ XXXVI: **Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven II** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

„ XXXVII: **Kinematik** von Dr. Karl Heun in Berlin.

„ XXXVIII: **Potentialtheorie.**

„ XXXIX: **Mechanische Wärmetheorie.**

„ XL: **Theoretische Optik** von Dr. J. Classen in in Hamburg.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
250720
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.

Vorwort.

Der Verfasser trug sich zwar seit längerer Zeit mit der Absicht, eine in einfachen Grenzen gehaltene „Differential- und Integralrechnung“ zu schreiben, hätte aber diese Absicht, im Hinblick auf die grosse Zahl vorhandener Lehrbücher, kaum verwirklicht, wäre ihm nicht die Aufforderung zugegangen, für die Sammlung „Schubert“ diese Teile zu übernehmen.

Der Charakter der „Differential- und Integralrechnung“, deren erster Band hiermit vorliegt, bestimmt sich eben in der Hauptsache dadurch, dass sie Teil einer Sammlung mathematischer Lehrbücher sein soll; es erschien daher angemessen, des öfteren auf andere Teile der Sammlung zu verweisen.

Der Verfasser hat sein besonderes Augenmerk auf die Fehlerabschätzungen gerichtet, da gerade derartige Betrachtungen und Rechnungen bei den Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf Naturwissenschaften eine hervorragende Rolle spielen. Dagegen erschien ein besonderes Eingehen auf naturwissenschaftliche Aufgaben nicht erforderlich, da solche in den bekannten Werken von Nernst-Schoenflies und Lorenz zur Genüge behandelt worden sind.

Aus ökonomischen Gründen erschien es zweckmässig, die Anwendungen der Differentialrechnung auf Kurven (und Flächen), zugleich mit ihren Umkehrungen, im zweiten Bande, der „Integralrechnung“, zu entwickeln.

Der Kenner des Gegenstandes wird finden, dass es sich der Verfasser hat angelegen sein lassen, den Stoff, soweit es möglich war, eigenartig zu gestalten.

Die Ausführlichkeit des Inhaltsverzeichnisses, sowie die zahlreichen Übungsaufgaben (insbesondere der §§ 14, 17, 18), werden dem Leser nicht unwillkommen sein.

Eine Zusammenstellung historischer Notizen über die Infinitesimalrechnung möchte sich der Verfasser für den Schluss des zweiten Bandes vorbehalten.

Ostseebad Warnicken,
Ende August 1901. **W. Fr. Meyer.**

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Abschnitt I.

Grenzwerte und Differentialquotienten. 1—191

Kapitel I.

Elementare Vorbetrachtungen. 1—73

§ 1. Zwei Hilfssätze aus der Potenzlehre . . . 1—7

Einleitendes über Grenzwerte gewisser, unbegrenzt fortsetzbarer Reihen rationaler Zahlen . . . . . 1—2

Frage nach den Grenzwerten der Reihen a^n, $a^{\frac{1}{n}}$ $(n = 1,2,3,...)$ 2

Hilfssatz $a^n > 1 + np$ 3

Grenzsatz I über den Grenzwert von a^n . . . . . 3—4

Grenzsatz II über den Grenzwert von $a^{\frac{1}{n}}$ 5

Gleichwertigkeit beider Grenzsätze 6

Formulierung des zweiten Grenzsatzes in der Gestalt $a^0 = 1$ 6—7

§ 2. Anwendung auf Arithmetik. Summe und Grenzwert der geometrischen Reihe. Stetigkeit der Potenz bei fester Basis . . . . . 7—15

1. Die geometrische Reihe . . . . . 7—12

Formel für die Summe der endlichen, n-gliedrigen, geometrischen Reihe . . . . . 7—8

Graphische Darstellung des Inhaltes dieser Formel . . . 8—9

Prinzip der Gleichheit einer Strecke mit der Summe ihrer Teilstrecken 9

Graphische Darstellung der beiden Grenzsätze des § 1 . . 10—11

Prinzip der Zerlegung einer Strecke in eine unbegrenzte Anzahl von Teilstrecken 11

Grenzwert der unbegrenzten geometrischen Reihe . . . 11—12

Seite

2. Stetigkeit der Potenz bei fester Basis . . 12—14

Vorgeschriebene Kleinheit der Differenz $a^{m+\varepsilon} - a^m$ . . 13

Korrespondenz zwischen einer unendlich kleinen Änderung des Exponenten und einer solchen der Potenz . . . 14

Erweiterung der beiden Grenzsätze des § 1 auf einen beliebigen Exponenten . . . . . 14—15

§ 3. Anwendungen auf Geometrie. Quadratur von Parabeln und verwandten Kurven . . . . . 15—33

Quadratur der Parabel. Einschliessung des gesuchten Flächeninhaltes zwischen zwei Grenzen, einer Summe zu kleiner und einer Summe zu grosser Rechtecke. . 15—16

Erste Einteilung der Basis, nach dem Prinzip der geometrischen Reihe 17

Lösung der Aufgabe der Parabelquadratur durch Übergang zur Grenze. Satz des Archimedes . . . . . 17—20

Zweite Einteilung der Basis, nach dem Prinzip der arithmetischen Reihe 21

Hilfsformel über die Summe der Quadrate der ersten n natürlichen Zahlen . . . . . 22—23

Lösung der Aufgabe der Parabelquadratur auf dem zweiten Wege 24

Quadratur höherer Parabeln $y = x^m$ (m ganz) nach der Methode der geometrischen Reihe . . . . . 24—26

Quadratur der Kurve $y = x^m$ (m rational), Grenzwert von $\frac{k^{m+1} - 1}{k - 1}$ für $\lim k = 1$ . . . . . 27—28

Ansatz zur Quadratur der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$ 28

Verschiedenes Verhalten der Kurven $y = x^m$ bei unbegrenztem Wachsen der Endabscisse des Flächeninhaltes; Grenzwert des letzteren 29

Quadratur der Kurven $y = ax^m + \beta x^p$, $y = ax^m + \beta x^p + \gamma x^q + \ldots$ . . . . . 30—32

Erweiterung auf beliebige Anfangs- und Endabscissen; Algebraische Summe der oberen und unteren Flächenstücke . . . . . 32—33

§ 4. Anwendungen auf Geometrie: Fortsetzung. Quadraturen ebener Kurven bei schiefwinkligen und Polarkoordinaten. Kubaturen von Rotationskörpern . . . . . 33—44

Quadratur der Kurve $y = ax^m$ bei schiefwinkligen Parallelkoordinaten . . . . . 33—35

Quadratur der Kurve $r^2 = a\varphi^m$ bei Polarkoordinaten. Die Archimedische und hyperbolische Spirale. Die allgemeinere Kurve: $r^2 = a\varphi^m + \beta x^p + \gamma x^q + \ldots$ . . . 35—38

Kubatur eines Rotationskörpers mit dem Meridian $y^2 = ax^m + \beta x^p + \gamma x^q + \ldots$ Das Rotations-Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid . . . . . 38—44

Seite

§ 5. **Weitere Grenzwerte der Geometrie. Darstellung des Kreisbogens durch trigonometrische Funktionen. Tangenten der Kegelschnitte** . . 44—56

1. Der Kreisbogen . . . . . 44—49

Das Verhältnis zwischen Sinus und Bogen bei kleinen Bögen; Grenzwert dieses Verhältnisses . . . . . 44—46

Weitere Entwickelung der Ungleichung $\cos\delta < \frac{\delta}{\sin\delta} < \frac{1}{\cos\delta}$ mittels fortgesetzter Halbierung des Bogens δ . . . 46—48

Darstellung des Bogens x durch das unbegrenzt fortsetzbare Produkt $\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}}$, mit Fehlerabschätzung 48

Anwendung auf π 49

2. Tangenten der Kegelschnitte . . . . . 49—56

Tangente einer Kurve . . . . . 49—50

Gleichung der Tangente von Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel . . . . . 50—56

§ 6. **Der binomische Satz.** . . . . . 56—61

Der binomische Satz als Mittel zur Vergleichung zweier Potenzen mit demselben Exponenten. . . . . 56—57

Begriff der Ableitung des Produktes cx^i 58

Die Koeffizienten des binomischen Satzes als successive Ableitungen von x^m 59

Zweite Form des binomischen Satzes; Teilbarkeit von $y^m - x^m$ durch $y - x$ . . . . . 60—61

§ 7. **Ganze Ausdrücke und Funktionen. Tangente einer höheren Parabel. Teilbarkeitseigenschaft einer ganzen Funktion ven x; einfache und mehrfache Wurzeln derselben. Binomische Entwickelung einer ganzen Funktion von einer und zwei Variabeln. Partielle Ableitungen. Eulers Identitäten für ganze homogene Funktionen** . . . . . 61—73

Übertragung des binomischen Satzes auf einen ganzen Ausdruck m^{ter} Ordnung $G(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ 61—63

Ableitungen eines ganzen Ausdrucks. Ganze Funktion einer Variabeln x. . . . . 63—64

Gleichung der Tangente der Parabel m^{ter} Ordnung $y = G(x)$ 64—65

Teilbarkeit der Differenz $G(x) - G(\alpha)$ durch $x - \alpha$. Kriterium einer einfachen und mehrfachen Wurzel α einer Gleichung $G(x) = 0$ . . . . . 66—67

Anwendung auf Gleichungen zweiten und dritten Grades . 67—68

Seite

Binomische Entwickelung einer ganzen Funktion $G(x, y)$ zweier Variabeln; Partielle Ableitungen von $G(x, y)$. 69—72
Eulers Identitäten zwischen einer ganzen homogenen Funktion von n Variabeln und ihren partiellen Ableitungen . . . . . 72—73

Kapitel II.

Differentialquotienten der elementaren Funktionen. Allgemeine Differentiationsregeln. 74—191

§ 8. Stetigkeit einer ganzen Funktion von einer resp. zwei Variabeln. Differenzenquotient und Differentialquotient einer Funktion einer Variabeln . . . . . 74—80

Unbegrenzte Abnahme von $|G(x+h) - G(x)|$ bei unbegrenzt abnehmendem h; Stetigkeit von $G(x)$ . . . 74—75
Übertragung auf ganze Funktionen $G(x, y)$ zweier Variabeln 75—76
Frage nach einer Entwickelung von $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von h . . . . . 76—77
Die Ableitungen einer ganzen Funktion $G(x)$ als Grenzwerte 78
Vergleichung der Änderung des Argumentes einer Funktion $f(x)$ mit der zugehörigen Änderung der letzteren. Differenzen- und Differentialquotient von $f(x)$ . . . 79
Differentialquotient einer ganzen Funktion $G(x)$ 80

§ 9. Die Ableitungen (Differentialquotienten) der trigonometrischen Funktionen . . . . . 80—93

Stetigkeit von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$; Bildung von deren Differentialquotienten; Abschätzung der Differenz zwischen Differenzen- und Differentialquotient . . . 82—91
Geometrische Deutung des Differentiationsprozesses . . . 91—93

§ 10. Die Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen oder die cyklometrischen Funktionen nebst ihren Ableitungen. Allgemeiner Begriff der Funktion und ihrer Umkehrung . 94—104

Eindeutige Festlegung der Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ . . 94—95
Die Formel: $x'y' = 1$. Übertragung auf eine beliebige Funktion; Abschätzung der Differenz $\frac{\Delta x}{\Delta y} - x'$ . . 96
Allgemeine Definition einer Funktion $f(x)$ und ihrer Umkehrung 97
Bezeichnungen für Differentialquotienten . . . . . 97—98

Seite

Stetigkeit von $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,cotg} x$ mit Fehlerabschätzung . . . . . 98—100
Differentialquotienten dieser Funktionen . . . . . 100—101
Abschätzung des Unterschiedes zwischen Differenzen- und Differentialquotient . . . . . 101—103
Vergleichung der Differentialquotienten der trigonometrischen und cyklometrischen Funktionen . . . . 103—104

§ 11. **Der Differentialquotient einer beliebigen Potenz x^m. Der Differentialquotient einer Funktion einer Funktion von x** . . . . . 104—112

Successive Ausdehnung der Formel des § 8 für den Differentialquotienten einer natürlichen Potenz auf eine beliebige Potenz . . . . . 104—110
$y = x^{\frac{m}{n}}$ als Funktion einer Funktion von x; allgemeine Bildung des Differentialquotienten einer Funktion y einer Funktion von x (mit Fehlerabschätzung) . . . 106—108
Auffassung von $y = x^{\frac{m}{n}}$ als impliziter Funktion von x, vermittelt durch die Relation $y^n - x^m = 0$. Zweite Methode der Bildung der Ableitung von y . . . . 111—112

§ 12. **Der Differentialquotient des Logarithmus und der Exponentialfunktion. Die Entwickelung und der Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Entwickelbarkeit der Exponentialfunktion** . . . . . 112—144

Schwierigkeit bei der Bildung der Ableitung von a^x. Frage nach dem Grenzwert $\lim_{\Delta x = 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. Ansatz zur Bildung der Ableitung von $\lg_a x$ 112
Hilfsaufgabe der Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 113—126
Einfachster Fall einer natürlichen Zahl n . . . . . 113—121
Einschliessung von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ in die beiden Grenzen 2 u. 3. Herunterdrückung des Restes R_1 unter den Wert einer geometrischen Reihe . . . . . 114—115
Ausdehnung des Verfahrens auf einen beliebigen Rest R_k; Herunterdrückung von R_k unter die Grenze $\frac{1}{k!}\frac{k+1}{k}$ 115—116
Der Satz: $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$, mit Fehlerabschätzung 117

Seite

Einschliessung von s_k zwischen zwei Grenzen mittels des Fehlergesetzes einer alternierenden Reihe . . . . . 118—121

Die Grenzgleichung: $\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$ (n natürliche Zahl) 122—123

Alternierende Entwickelung für $\frac{1}{e}$, mit Fehlerabschätzung 123

Vergleichung der Entwickelungen von e und $\frac{1}{e}$ . . . . 124—125

Die allgemeine Grenzgleichung $\lim_{\Delta x=0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=e$ . . 125—126

Differentialquotient von $\lg_a x$ und a^x . . . . . 126—127

Natürliche Logarithmen lx 127

Beweis der Grenzgleichung des § 3: $\lim_{\Delta x=0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=la$ 128

Numerische Berechnung von e und $\frac{1}{e}$ mit Fehlerabschätzungen . . . . . 129—134

Die Grenzgleichung: $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$ 134—137

Übertragung auf a^x 138

Abmessung der Stetigkeit der Exponentialfunktion und des Logarithmus . . . . . 138—140

Abmessung des Unterschiedes zwischen Differenzen- und Differentialquotient der Exponentialfunktion und des Logarithmus . . . . . 141—144

§ 13. Allgemeine Gesetze über die Bildung von Differentialquotienten zusammengesetzter Ausdrücke . . . . . 144—165

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse über die Ableitungen der Elementarfunktionen 144

Regel über die Funktionen von Funktionen. Andere Fassung der Regel: x, y sind Funktionen eines Parameters u 144—145

Ausdehnung auf mehrere Zwischenvariable . . . . . 145—146

Differentialquotienten der Summe und Differenz (S. 146 bis 148), des Produktes (S. 148—151) und des Quotienten (S. 152—155) zweier resp. mehrerer Funktionen, mit Abschätzung des Unterschiedes zwischen Differenzen- und Differentialquotient . . . . . 146—155

Differentialquotient einer impliziten Funktion von x, mit Fehlerabschätzung; partielle Ableitungen einer Funktion mehrerer Variabeln . . . . . 155—161

Differentialquotient von $f(x, y)$, wo x, y Funktionen von u sind . . . . . 161—163

Seite

Differentialquotient von $f(x, y)$, wo y eine explizite resp. implizite Funktion von x ist. . . . . 163—164
Differentialquotient von $f(x, y, z, \ldots)$, wo $x, y, z, \ldots$ Funktionen von u sind. . . . . 164—165

§ 14. **Übungsbeispiele zu den besonderen und allgemeinen Differentiationsregeln** . . . . . 165—191

A. Algebraische Funktionen . . . . . 166—170
B. Trigonometrische und cyklometrische Funktionen . . 170—176
C. Exponential- und logarithmische Funktionen . . . . 177—185
Logarithmische Differentiation 183
Differentialquotient einer Potenz $f(x)^{\varphi(x)}$ . . . . . 183—184
D. Implizite Funktionen . . . . . 185—187
Differentiation einer Gleichung 186
E. Funktionen $x = f(t)$, $y = g(t)$ . . . . . 187—191

Abschnitt II.

Reihenentwickelungen. 192—395

Kapitel I.

Der Mittelwertsatz mit Anwendungen. 192—249

§ 15. **Das Rollesche Theorem und der Cauchysche Mittelwertsatz** . . . . . 192—203

Frage nach der Übertragung der Entwickelung des § 7 einer ganzen Funktion $f(x+h)$ nach Potenzen von h auf andere Funktionen 192
Vorfrage nach der Ausdrückbarkeit einer Differenz $f(b)—f(a)$ durch die erste Ableitung von f 193
Verallgemeinerte Frage nach einem Verschwindungswert $x = \xi$ von $\varphi'(x)$ beim Verschwinden der Funktion $\varphi(x)$ für $x = a$ und $x = b$. Beispiele . . . . . 194—202
Einfachster Fall: $\varphi(x)$ im Intervalle $(a, b) \neq 0$, desgleichen $\varphi'(a)$, $\varphi'(b)$ . . . . . 194—200
Darstellung des gesuchten Mittelwertes ξ (zwischen a und b) durch einen unendlichen Dezimalbruch . . . . . 198—200
Aufhebung der gemachten Beschränkungen . . . . . 200—201
Das Rollesche Theorem über einen mittleren Verschwindungswert $x = \xi$ einer stetigen Funktion $\psi(x)$ bei Ungleichnamigkeit von $\psi(a)$ und $\psi(b)$ 201
Erweiterung des Rolleschen Theorems 201
Der Zwischensatz über die Existenz eines mittleren Verschwindungswertes $x = \xi$ von $\varphi'(x)$ bei Verschwinden von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ 202
Der Cauchysche Mittelwertsatz: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ . . 203

Seite

Anwendungen des Mittelwertsatzes §§ 16—18 . . 203—249

§ 16. **Stetigkeitsabmessungen für die elementaren Funktionen.** . . . . . 203—209

Gleichmässige Stetigkeit einer Funktion $f(x)$ innerhalb eines Intervalles 204
Ausführung der Rechnung für die elementaren Funktionen 204—209

§ 17. **Unbestimmtheitswerte** . . . . . 209—224

Frühere Beispiele für die Unbestimmtheitsform $\frac{0}{0}$ 209

Die Regel I für die Bestimmung des Grenzwertes $\left\{\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right\}_{x=a}$, wenn $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ 210

Die Regel II für die Bestimmung des Grenzwertes $\left\{\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right\}_{x=a}$, wenn $f(a)=\infty$, $\varphi(a)=\infty$ . . . . . 211—213
Die Regel III für die Unbestimmtheitsformen $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ 213
Die Regel IV für den Grenzwert einer Potenz $f(x)^{\varphi(x)}$ in den Fällen 0^0, ∞^0, 1^∞ 214
Beispiele zu den Unbestimmtheitswerten . . . . . 215—224

Formen $\frac{0}{0}$ (S. 215—217). Formen $\frac{\infty}{\infty}$; direkte Bestimmung von $\left(\frac{e^x}{x}\right)_{x=\infty}$ (S. 218—221). Formen $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ (S. 221—223). Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ (S. 223—224).

§ 18. **Maxima und Minima von Funktionen einer Variabeln** . . . . . 224—249

Extreme Werte $f(a)$ an singulären Stellen a. Scheidung in Maxima und Minima 224
Kriterium für Zu- resp. Abnahme einer Funktion $f(x)$. . 225—226
Das Verschwinden von $f'(a)$ für extreme Werte $f(a)$. . . 226
Umgekehrte Frage: Welche Verschwindungswerte von $f'(x)$ liefern ein Maximum resp. Minimum von $f(x)$?. . . 226—228
Allgemeine Regel zur Bestimmung der Maxima und Minima von $f(x)$. 228
Erweiterung auf den Fall einer Funktion $f(x, y)$, wo zwischen x, y eine funktionale Abhängigkeit besteht (Maxima und Minima mit Nebenbedingung) . . . . 229—231
Beispiele, zumeist geometrischen Charakters, für Maxima und Minima . . . . . 231—249

Seite

Kapitel II.

Die Taylorsche und Maclaurinsche Reihenentwickelung mit Anwendungen. 249—316

§ 19. Die Taylorsche und Maclaurinsche Reihenentwickelung für Funktionen einer Variabeln. Anwendungen auf Unbestimmtheitswerte, extreme Werte, Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient . . . . . 249—263

Successive Erweiterung des Mittelwertsatzes. Die Taylorsche Reihenentwickelung und die Maclaurinsche mit Lagrangeschem Restglied . . . . . 249—254
Äquivalenz beider Entwickelungen 255
Frage nach der Konvergenz des Restgliedes gegen Null . 255
Schwierigkeit infolge des unbekannten Wertes ϑ. Verallgemeinerung des Restgliedes. Taylorsche und Maclaurinsche Entwickelung mit dem Cauchyschen Restgliede . . . . . 256—259
Anwendungen der Taylorschen Entwickelung auf Unbestimmtheitswerte (S. 259), auf extreme Werte (S. 260), auf die Abschätzung des Unterschiedes zwischen Differenzen- und Differentialquotient (S. 261—263) . . . . . 259—263

§ 20. Entwickelungen einzelner Funktionen von einer Variabeln nach der Taylorschen resp. Maclaurinschen Reihe . . . . . 263—308

1. $y = \sin x$. Verallgemeinerung für das Restglied einer alternierenden Maclaurinschen Entwickelung. Entwickelung ohne Kenntnis des Restgliedes . . . . . 263—266
2. $y = \cos x$. Additionstheorem der Trigonometrie . . . 266—268
3. $y = e^x$ . . . . . 268—269
4. $y = l(1 + x)$. Lagrangesches und Cauchysches Restglied. Verallgemeinerung auf das Restglied einer Entwickelung mit positiven Gliedern . . . . . 270—274
Berechnung der Logarithmen . . . . . 274—277
5. $y = (1 + x)^m$. Lagrangesches und Cauchysches Restglied 277—282
Grenzwert von $m_n x^n$ für $|x| \leq 1$. Binomische Reihe . . 282—285
Anwendungen: Ausziehung von Wurzeln, Maskelynesche Regel mit Fehlerabschätzung . . . . . 286—288
6. $y = \operatorname{arctg} x$ . . . . . 289—300
Rekursionsformel für die höheren Ableitungen von y, sowie für die Zähler derselben . . . . . 289—291
Explizite Darstellung der νten Ableitung von $\operatorname{arctg} x$ . . 292—293
Lagrangesches und Cauchysches Restglied der Maclaurinschen Entwickelung; Abschätzung des Restgliedes auf Grund einer Relation zwischen Binomialkoeffizienten . . . 293—296

Seite

Leibnizsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$. Herstellung schneller konvergierender Reihen mittels des Additionstheorems des Tangens . . . . . 296—297
Taylorsche Entwickelung für arctg $(x+h)$ mit Untersuchung des Restgliedes . . . . . 297—300
7. $y = \arcsin x$ . . . . . 300—308
Rekursionsformel zwischen den höheren Ableitungen resp. deren Zählern . . . . . 300—302
Explizite Darstellung der ν^{ten} Ableitung . . . . . 302—304
Lagrangesches und Cauchysches Restglied der Maclaurinschen Reihe. . . . . 304—307
Entwickelung für $\frac{\pi}{6}$ 307
Taylorsche Entwickelung für $\arcsin(x+h)$ mit Untersuchung des Restgliedes . . . . . 307—308

§ 21. Die Taylorsche und Maclaurinsche Reihenentwickelung für Funktionen mehrerer Variabeln 308—316

Doppelter Ansatz zur Entwickelung von $f(x+h, y+k)$: nach Potenzen von h, dann nach Potenzen von k, und vice versa 308
Vergleichung beider Entwickelungen. Gleichheit von f_{12} und f_{21} . . . . . 310—311
Stetigkeit einer Funktion $f(x, y)$ an einer Stelle, in einem Intervalle 311
Unabhängigkeit einer partiellen Ableitung von $f(x, y, z, \ldots)$ von der Reihenfolge der Differentiationen 312
Taylorsche Entwickelung für $f(x+h, y+k)$ 313
Zweite Herleitung mit übersichtlicherem Restgliede, mittels Einführung einer Hilfsvariabeln t . . . . . 314—315
Totales Differential von $f(x, y)$ 315
Maxima und Minima von $f(x, y)$. . . . . 315—316

Kapitel III.

Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen und Produkte 316—395

§ 22. Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen . . . . . 316—362

Frühere Beispiele von unbegrenzt fortsetzbaren Reihen resp. Produkten 316
Definition mathematischer Ausdrücke durch unendliche *Reihen resp.* Produkte 317

Seite

Unendliche Reihen mit positiven Gliedern . . 317—362

Summe s_n der ersten n Glieder. Rest $R_{n,p}$ 317

Definition der Konvergenz resp. Divergenz. Summe einer konvergenten Reihe 318

Rechnen mit Grenzwerten überhaupt. Fundamentalreihen 318—323

Die unendliche geometrische Reihe . . . . . 323—324

$\lim u_n = 0$ als notwendige (aber nicht hinreichende) Konvergenzbedingung. 324

Divergenz der harmonischen Reihe $u_n = \frac{1}{n}$. Bernoullisches Beweisprinzip . . . . . 324—325

$\lim n u_n = 0$ als notwendige Konvergenzbedingung. . . 325—326

Divergenz der Cauchyschen Reihe $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ 326

Zwei einfache Ungleichungen für den natürlichen Logarithmus 326

Divergenz der Bertrandschen Reihe $u_n = \frac{1}{n \ln n \ln_2 n \ldots \ln_k n}$. 327

Notwendigkeit der Konvergenzbedingung $\lim n \ln n \ln_2 n \ldots \ln_k n \cdot u_n = 0$ 327

Umkehrung der ursprünglichen Konvergenzdefinition . . 328

Unabhängigkeit der Reihensumme von der Gliederanordnung. Absolute Konvergenz 328

Vergleichung zweier Reihen mittels der Ungleichung $u_n \lesseqgtr u_n'$. Kriterien 1. Art 329

Vergleichung zweier Reihen mittels der Ungleichung $\frac{u_n}{u_{n+1}} \lesseqgtr \frac{u_n'}{u_{n+1}'}$. Kriterien 2. Art 330

Die geometrische Reihe als Vergleichsreihe. Cauchys Konvergenz- resp. Divergenzkriterium 2. Art: $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \lessgtr 1$. 331

Anwendungen auf die Exponentialreihe, logarithmische und binomische Reihe. 332

Versagen des Cauchyschen Kriteriums. 333

Konvergenz resp. Divergenz der hyperharmonischen Reihe $u_n = \frac{1}{n^\sigma}$ . . . . . 334—336

Ihre Verwendbarkeit als Vergleichsreihe auf Grund der Eigenschaft $\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \sigma$ . . . . . 335—337

Raabes Konvergenz resp. Divergenzkriterium 2. Art: $\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \gtrless 1$. 338

Seite

Erste Ergänzung des Raabeschen Divergenzkriteriums . . 339

Anwendungen des Raabeschen Kriteriums auf die Reihe $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, die arcsin 1-Reihe, die binomische Reihe, die Reihe $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+a}{n+b}$ . . . . . 339—343

Zweite Ergänzung des Raabeschen Divergenzkriteriums . 343

Gaussscher Kriterium 2. Art: $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ als rationale Funktion von n . . . . . 344—345

Gleichzeitige Konvergenz resp. Divergenz einer Reihe u_n mit der andern: $1 \cdot u_1 + k u_k + k^2 u_{k^2} + \ldots + k^\nu u_{k^\nu}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ . . . . . 345—347

Anwendung auf die Reihe $u_n = \frac{1}{n(ln)^\sigma}$. Verwendung der letzteren als Vergleichsreihe . . . . . 347—349

Konvergenz resp. Divergenz der Bertrandschen Reihe:

$$u_n = \frac{1}{n\,ln\,l_2 n \ldots l_{i-1} n (l_i n)^\sigma} = \frac{1}{L_{i-1}(n)\,(l_i n)^\sigma}$$

für $\sigma \gtrless 1$ . . . . . 349—350

Ein zweiter geometrischer Beweis . . . . . 350—352

Entwickelung des Quotienten:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{l(n+1)}{ln} \cdot \frac{l_2(n+1)}{l_2 n} \cdots \frac{l_{i-1}(n+1)}{l_{i-1} n} \cdot \left\{\frac{l_i(n+1)}{l_i n}\right\}^\sigma$$

unter wiederholter Anwendung des einmal erweiterten Mittelwertsatzes . . . . . 351—354

Einführung der auf $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ ausgeübten Prozesse:

$$U_0 = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right), \quad U_1 = ln\,(U_0 - 1),$$

$$U_2 = l_2 n\,(U_1 - 1), \ldots, \quad U_i = l_i n\,(U_{i-1} - 1) \ldots . \quad 354$$

Hilfssatz über den k-mal iterierten Logarithmus l_k:

$$\frac{l_k(n+1)}{l_k n} = 1 + \frac{r_n^{(k)}}{L_k(n)}, \quad \lim r_n^{(k)} = 1, \quad \lim n\,(r_n^{(k)} - 1)$$

$$= -\frac{1}{2} \ldots . \quad 354—356$$

Die Bertrandsche Reihe als Vergleichsreihe auf Grund der Eigenschaft: $\lim U_i = \sigma$. 357

Seite

Das allgemeine logarithmische Konvergenz- resp. Divergenzkriterium 2. Art: $\lim U_i \gtrless 1$. Das Bertrandsche Kriterium 2. Art . . . . . 357—358

Anwendung auf die Reihe $u_n = \frac{1}{n^\sigma}$, wo $\lim \sigma(n) = 1$, auf die entsprechende allgemeine Reihe $u_n = \frac{1}{L_{i-1}(n)(l_i n)^\sigma}$. Verkürzung des Prozesses U um $i+1$ Schritte mit Anwendung auf den Exponenten σ . . . . . 359—361

Anwendung auf die allgemeinere Reihe $u_n = \frac{1}{n^{\sigma_0}(ln)^{\sigma_1}\ldots(l_i n)^{\sigma_i}}$, $\lim \sigma_k(n) = 1$ 360

Kriterien 1. Art 361

Das Cauchysche Konvergenz- resp. Divergenzkriterium 1. Art: $\lim \sqrt[n]{n_n} \gtrless 1$ 361

Das Bertrandsche Konvergenz- resp. Divergenzkriterium 1. Art: $\lim \frac{1}{\frac{L_{i-1}(n)\, u_n}{l_{i+1}(n)}} \gtrless 1$ 362

§ 23. **Fortsetzung. Unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern** . . . . . 362—370

Definition der Konvergenz und der eigentlichen, sowie uneigentlichen Divergenz . . . . . 362—363

Das Leibnizsche Konvergenzkriterium für alternierende Reihen . . . . . 363—364

Zurückführung einer Reihe mit positiven und negativen Gliedern $(u, -u')$ auf die ihrer absoluten Beträge. Absolute und unbedingte Konvergenz 365

Riemanns Verfahren der Gliederumstellung bei Divergenz beider Teilreihen der u und u'. Erzeugung eines beliebigen Grenzwertes. Bedingte Konvergenz. Äquivalenz der absoluten und unbedingten Konvergenz . . . . 365—366

Erzeugung von Reihen, die in einem Intervalle oscillieren 366

Die Wertänderung der Reihe $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ bei successiver Folge von je p positiven und q negativen Gliedern. Übertragung auf die Reihe $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ bei endlichem Grenzwert $\lim n a_n$ . . . . . 367—370

§ 24. **Fortsetzung. Unendliche Produkte** . . . 371—395

Rekapitulation über den $\lim m_n$ 371

Der Satz: $\lim (1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_n) = 0$ bei positiven u, $\lim u_n = 0$ und Divergenz der Reihe der u. 371—373

Divergenz eines unendlichen Produktes nach Null . . . 373

Produkt Π_n der ersten n Faktoren eines unendlichen Produktes, Restprodukt $\frac{\Pi_{n+p}}{\Pi_n} = P_{n,p}$ 373

Seite

Definition der Konvergenz, der eigentlichen und uneigentlichen Divergenz eines unendlichen Produktes . . . 374—375
Entwickelung des Restproduktes $(1+u_n)\dots(1+u_{n+p-1})$ bei positiven u . . . . . 375—376
Konvergenz eines unendlichen Produktes $(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)\dots$ bei positiven u im Falle der Konvergenz der Reihe der u 376
Logarithmische Methode nach Cauchy 377
Konvergenz von $(1-u_0)(1-u_1)\dots(1-u_n)\dots$ bei positiven u im Falle der Konvergenz der Reihe der u . 377—378
Reduktion der Konvergenz eines unendlichen Produktes $(1+v_0)(1+v_1)\dots(1+v_n)\dots$ bei positiven und negativen v auf die Konvergenz der Reihe der v. Bedingte Konvergenz. Divergenz des Produktes nach Null bei Divergenz der Reihe der v^2 . . . . . 378—381
Allgemeines Konvergenz- und Divergenzkriterium für Produkte $(1+v_0)(1+v_1)\dots(1+v_n)\dots$ mit positiven und negativen v 381

Produktentwickelungen von $\sin x$ und $\cos x$ 382—395

Darstellung von $\cos m\alpha$ und $\frac{\sin m\alpha}{m \sin\alpha \cos\alpha}$ (m gerade) als ganzer Funktionen $\frac{m}{2}^{\text{ten}}$ resp. $\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\text{ten}}$ Grades von $\sin^2\alpha$ 382—383
Endliche Faktorenzerlegung von $\cos m\alpha$, $\frac{\sin m\alpha}{m \sin\alpha \cos\alpha}$, $\cos x$ und $\sin x$ . . . . . 383—384
Übergang zu den unendlichen Produkten 385
Einführung einer zweiten endlichen Faktorenzerlegung mit Hilfe des Tangens statt des Sinus . . . . . 385—386
Die Ungleichung:

$$\left|1-\frac{\sin^2 u}{\sin^2 v}\right| < \left|1-\frac{u^2}{v^2}\right| < \left|1-\frac{\operatorname{tg}^2 u}{\operatorname{tg}^2 v}\right|$$

$$\left(0<u<\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(0<v<\frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 386—388$$

Entwickelung von $\cos x$ und $\sin x$ in unbegrenzt fortsetzbare Produkte, mit Fehlerabschätzung. Wallissche Formel für $\frac{\pi}{2}$ . . . . . 388—391
Entwickelung von $\cos x$ und $\sin x$ in unendliche Produkte 391—392
Die Verschwindungswerte von $\cos x$, $\sin x$, Periodizität von $\cos x$, $\sin x$ . . . . . 393—394
Summation der hyperharmonischen Reihe: $u_n = \frac{1}{n^2}$ . . 395

Abschnitt I.

Grenzwerte und Differentialquotienten.

Kapitel I.

Elementare Vorbetrachtungen.

§ 1. Zwei Hilfssätze aus der Potenzlehre.

Die Reihe der „natürlichen“ Zahlen

(1) $\quad 1, 2, 3, 4, \ldots (n-1), n, (n+1), \ldots$

bricht nie ab, sie ist „unbegrenzt fortsetzbar“ oder kurz: „unbegrenzt“. Wenn jemand eine noch so grosse (positive) Zahlgrösse*) ω angiebt, so kann man in der Reihe (1) stets soweit gehen, bis man auf ein „Glied“ der Reihe, eine Zahl n stösst, die noch grösser als ω ist.

Dafür bedient man sich auch des Ausdrucks: „Man kann n „beliebig wachsen“ oder auch „unendlich gross werden“ lassen.“ Häufig sagt man auch: „n hat den Grenzwert Unendlich (in Zeichen: den Grenzwert ∞)“.

Umgekehrt hat die ebenfalls unbegrenzt fortsetzbare Reihe der „Stammbrüche“:

(2) $\quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots$

*) Da der Anfänger unter einer „Zahl“ leicht nur eine ganze Zahl versteht, bedienen wir uns des Ausdrucks „Zahlgrösse“, um damit eine rationale oder irrationale (positive oder negative) Zahl zu bezeichnen (s. diese Sammlung Bd. 1 §§ 25, 31).

die Eigenschaft, dass ihre Glieder an Grösse „unbegrenzt abnehmen", d. i.: nennt wiederum jemand eine noch so kleine (positive) Zahlgrösse ε, so kann man die Reihe (2) soweit verfolgen, bis man ein Glied $\frac{1}{n}$ trifft, das noch kleiner als ε ist; offenbar hat man zu dem Behuf nur n grösser als $\frac{1}{\varepsilon}$ zu wählen. Man sagt in diesem Sinne auch, dass die Glieder der Reihe (2) „bei beliebig wachsendem n unter jede Grenze sinken", oder auch: „gegen Null konvergieren", oder auch: „unendlich klein werden", oder endlich: „$\frac{1}{n}$ hat bei beliebig wachsendem n den Grenzwert Null".

Das nämliche gilt von der etwas allgemeineren Reihe:

$$(3) \qquad \frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4}, \cdots \frac{k}{n-1}, \frac{k}{n}, \frac{k}{n+1}, \cdots$$

wenn k eine beliebig, aber fest gewählte (positive) Zahlgrösse bedeutet.

Die Reihen (1) und (2) spielen, wie wir gleich sehen werden, bei der Vervollständigung der elementaren Potenzlehre der Arithmetik eine grundlegende Rolle. Indem wir die Glieder von (1) resp. (2) als Exponenten einer festen (positiven) Basis a betrachten, bilden wir die beiden neuen Reihen:

$$(4) \qquad a^1 = a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ a^{n-1},\ a^n,\ a^{n+1},\ \ldots$$

$$(5) \qquad \begin{cases} a^1 = a,\ a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},\ a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a},\ a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a},\ \ldots \\ a^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt[n-1]{a},\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ a^{\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+1]{a},\ \ldots \end{cases}$$

wo das Wurzelzeichen $\sqrt[n]{a}$ stets die eine positive n^{te} Wurzel aus n bedeutet, deren Existenz die gewöhnliche Arithmetik (s. diese Sammlung Bd. 1 § 30) nachweist.

Wir fragen, ob nicht die neuen Reihen (4), (5) einen ähnlichen Charakter aufweisen wie die früheren (1), (2), d. h. ob sich nicht auch hier ein bestimmter Wert angeben lässt, dem sich die Glieder von (4) resp. (5) bei beliebig wachsendem n mit beliebiger Genauigkeit nähern?

Es kann die Basis a in der Reihe (4) grösser oder kleiner als die Einheit sein, oder im besondern auch ihr gleich. Im letzteren Fall, wenn a gerade gleich der Einheit, ist auch jede Potenz a^n der Reihe (4) gleich der Einheit, und es ist damit die aufgeworfene Frage schon entschieden.

Sieht man also von diesem speziellen Falle ab, so genügt es ersichtlich, bloss eine der beiden Möglichkeiten $a > 1$, $a < 1$ in Betracht zu ziehen. Denn angenommen, die in Rede stehende Frage sei bereits für eine beliebige Basis $a < 1$ beantwortet, so ist sie es zugleich auch für die Basis $\frac{1}{a} > 1$ — da ja $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ —, d. h. für jede Basis > 1, und umgekehrt. Es empfiehlt sich, den Fall $a > 1$ direkt zu untersuchen, und wir setzen demgemäss:

$$a = 1 + p \ (p > 0), \tag{6}$$

wo also unter p eine im übrigen beliebige, wenn nur positive Zahlgrösse zu verstehen ist. Es wird nunmehr succesive:

$$\begin{cases} a^1 = a = 1 + p, \ a^2 = (1+p)(1+p) = a(1+p), \\ a^3 = a^2(1+p), \ a^4 = a^3(1+p), \ \ldots \\ a^n = a^{n-1}(1+p), \ a^{n+1} = a^n(1+p), \ \ldots \end{cases} \tag{7}$$

Aus diesen Gleichheiten lassen sich einfachere Ungleichheiten ableiten. Da $a^2 = (1+p)(1+p) = 1 + 2p + p^2$, so ist jedenfalls: $a^2 > 1 + 2p$; weiter $a^3 = a^2(1+p) = 1 + 3p +$ positiven Gliedern, also sicher $a^3 > 1 + 3p$; desgleichen $a^4 > 1 + 4p$ u. s. f.

So fortfahrend, wird man gemäss der sogenannten „unvollständigen Induktion“ erwarten dürfen, dass allgemein $a^n > 1 + np$ ist. Der Beweis dafür geschieht vermöge „des Schlusses von n auf $n+1$“ oder der sogenannten „vollständigen Induktion“. Aus der Annahme der Richtigkeit von $a^n > 1 + np$ für irgend ein n folgt wegen $a^{n+1} = a^n(1+p)$ sofort $a^{n+1} > (1+np)(1+p)$, i. e. $> 1 + (n+1)p +$ einem positiven Gliede, also um so mehr $a^{n+1} > 1 + (n+1)p$. Für $n = 2, 3, 4$ war aber die in Rede stehende Ungleichung direkt erwiesen, mithin gilt sie allgemein.

Somit hat sich für jede natürliche Zahl $n (> 1)$ ergeben:

$$a^n > 1 + np. \tag{8}$$

Hieraus lässt sich aber unmittelbar folgern, dass a^n bei beliebig wachsendem n unendlich gross wird: denn sei wiederum ω eine beliebig gross gewählte Zahlgrösse, und soll ein Exponent n derart bestimmt werden, dass $a^n > \omega$ wird, so hat man nur die rechte Seite der Ungleichung (8) noch grösser als ω zu machen:

$$1 + np > \omega, \text{ i. e. } n > \frac{\omega - 1}{p}. \tag{9}$$

Sei beispielsweise p gleich ein Milliontel $= 0{,}000001$, somit a nur wenig von Null verschieden, und sei ω gleich einer Million + Eins $= 1\,000\,001$ gewählt, so wird $\frac{\omega - 1}{p}$ gleich einer Billion $= 1\,000\,000\,000\,000$, und man hat nur n noch grösser als eine Billion zu wählen, um für a^n einen Wert zu erhalten, der $\omega = 1\,000\,001$ an Grösse übertrifft.

Damit ist nach Obigem auch der zweite Hauptfall $a < 1$ erledigt, denn da $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$, also auch $a^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n}$ ist, und der Nenner dieses Bruches wegen $\frac{1}{a} > 1$ bei beliebig wachsendem n jede noch so grosse Zahl überschreitet, so muss umgekehrt a^n bei derselben Annahme unter jede noch so kleine Zahl heruntersinken.

Wir können demnach den ersten Hauptsatz aussprechen:

> I. Ist a eine positive Basis, so hat die Potenz a^n, wenn n eine beliebig wachsende natürliche Zahl vorstellt, den Grenzwert 0 oder ∞, je nachdem a kleiner oder grösser als 1 ist; nur in dem speziellen Falle $a = 1$ hat a^n für jeden Wert von n den Wert 1.

Nunmehr werde die analoge Untersuchung betreffs der Reihe (5) angestellt. Sei wiederum $a > 1$, also nach (6) gleich $1 + p$ gesetzt, so ist $\sqrt[n]{a}$ sicher ebenfalls > 1, und wir dürfen daher schreiben:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1 + p} = 1 + \pi_n \tag{10}$$

oder, was dasselbe ist:

(10a) $$(1+\pi_n)^n = a = 1+p,$$

wo unter π_n eine positive Zahlgrösse zu verstehen ist, die natürlich für jedes n einen andern Wert annimmt. Da aber gemäss (8)

$$(1+\pi_n)^n > 1+n\pi_n$$

ist, so folgt unmittelbar aus (10):

(11) $$1+p > 1+n\pi_n,$$

mithin

(11a) $$\pi_n < \frac{p}{n}.$$

Dies lehrt im Hinblick auf die Reihe (3), dass

$$\pi_n = \sqrt[n]{a} - 1$$

mit wachsendem n unter jede Grenze sinkt, gleichgültig, wie gross der vorgelegte Wert von p war. Hätte man dagegen $a < 1$ angenommen, so brauchte man nur $\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ statt $\sqrt[n]{a}$ zu schreiben, um auf den eben behandelten Fall zurückzukommen. Der Unterschied zwischen beiden Fällen ist nur der, dass sich $\sqrt[n]{a}$ bei wachsendem n einmal „von oben her" d. h. von seiten der grösseren Werte, das anderemal „von unten her" d. h. von seiten der kleineren Werte der Einheit beliebig nähert. Da endlich für $a = 1$ auch $\sqrt[n]{a} = 1$, so haben wir den zweiten Hauptsatz gewonnen:

> II. „Die n^{te} Wurzel aus einer positiven Zahlgrösse a hat bei beliebig wachsendem n den Grenzwert Eins."

Hierbei ist der „Grenzwert Eins" auch auf den besonderen Fall übertragen worden, wo man sich dem Werte Eins nicht nur beliebig nähert, sondern ihn auch thatsächlich erreicht, wie es bei $a = 1$ zutrifft.

Sei wieder beispielsweise $a = 1\,000\,001$, also p gleich einer Million, so hat man in (11a) nur n gleich einer Billion zu nehmen, um π_n unter ein Milliontel herunterzudrücken, d. i. die billionte Wurzel aus $a = 1\,000\,001$ unterscheidet sich von der Einheit um weniger als ein Milliontel.

Eine genauere Betrachtung lehrt, dass die beiden Sätze I und II im Grunde dasselbe aussagen oder einander „gleichwertig“ sind, d. i. der eine kann aus dem andern hergeleitet werden, und umgekehrt.

In der That, nehmen wir zuerst I als bewiesen an. Würde sich dann $\sqrt[n]{a}$ — wir dürfen uns wiederum auf den einen Hauptfall $a > 1$ beschränken — bei wachsendem n nicht beliebig der Einheit nähern, so wäre das nur so möglich, dass $\sqrt[n]{a}$ stets grösser als $1 + k$ bliebe, wo k eine angebbare feste, wenn auch noch so kleine (positive) Zahlgrösse bedeutet; dann müsste auch stets $a > (1 + k)^n$ sein, im Widerspruch mit I, wonach $(1 + k)^n$ für ein genügend grosses n jede gegebene Zahlgrösse a überschreitet.

Andererseits gehen wir von der Annahme aus, der Satz II sei gültig. Würde dann a^n (für $a > 1$) bei wachsendem n nicht jede Grenze überschreiten, so wäre das nur so möglich, dass a^n stets unter einer angebbaren festen, wenn auch noch so grossen Zahlgrösse ω bliebe; dann müsste aber auch stets a unter $\sqrt[n]{\omega}$ bleiben, im Widerspruch mit II, wonach $\sqrt[n]{\omega}$ bei wachsendem n der Eins beliebig nahe kommen, also für ein genügend grosses n zwischen a und 1 zu liegen kommen, i. e. kleiner als a werden müsste.

Wir legen das Ergebnis dieser vergleichenden Betrachtung in dem Satze nieder:

> III. „Die Sätze I und II drücken eine und dieselbe mathematische Thatsache in verschiedener Gestalt aus.“

Da $\sqrt[n]{a}$ in der Potenzform $a^{\frac{1}{n}}$ geschrieben wird (s. Bd. 1 § 31), und der Grenzwert von $\frac{1}{n}$ (für $n = \infty$) die Null ist, so bedient man sich für den Satz II auch der kürzeren Formulierung:

$$a^0 = 1. \tag{12}$$

Jedoch darf diese Schreibweise durchaus nicht verwechselt werden mit einer in der elementaren Zahlen- und Potenzlehre üblichen: dort dient a^0 nur als ein Bequem-

lichkeitszeichen, um gewisse Hauptsätze*) einheitlicher aussprechen zu können; hier aber bedeutet (12) einen beweisbaren und oben bewiesenen wirklichen Satz, und zwar einen „Grenzsatz".

Im folgenden soll uns zunächst eine Reihe von Anwendungen der Sätze I und II auf Arithmetik (§ 2) und Geometrie (§ 3 und 4) beschäftigen, um deren Tragweite und Fruchtbarkeit schon auf dieser Anfangsstufe bis zu einem gewissen Grade erkennen zu lassen.

§ 2. Anwendungen auf Arithmetik.

Summe und Grenzwert der geometrischen Reihe. Stetigkeit der Potenz bei fester Basis.

1. Die geometrische Reihe.

Unter einer geometrischen Reihe versteht man die bereits in § 1 unter (4) eingeführte Reihe der successiven Potenzen (mit natürlichem Exponenten) einer Zahlgrösse g:

$$(1) \qquad g^0 = 1,\ g^1 = g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots\ g^{n-1},\ g^n,\ \ldots$$

Die Reihe als solche ist, wie die Reihen (1) bis (5) in § 1, unbegrenzt. Brechen wir aber hinter irgend einem Gliede, etwa g^{n-1}, ab, so heisst die Reihe eine „endliche", mit der „Gliederanzahl" n. Wir betrachten zuvörderst diese endliche Reihe und knüpfen an die elementare Aufgabe (s. diese Sammlung Bd. 5) an, die im folgenden häufig vorkommende Summe s_n:

$$(2) \qquad s_n = 1 + g + g^2 + g^3 + \ldots + g^{n-1},$$

die „die Summe der endlichen n-gliedrigen geometrischen Reihe" genannt wird, auf einen theoretisch wie praktisch einfacheren Ausdruck zu bringen. Man verfährt

*) So z. B., um für zwei resp. mehrere in ihre Primfaktoren zerlegten natürlichen Zahlen sowohl den grössten gemeinsamen Teiler, wie das kleinste gemeinsame Vielfache je nach einer einfachen Regel zu finden (s. diese Sammlung Bd. 6, Abschn. III); ferner, um bei dem Potenzgesetz $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ auch den Fall $m = n$ mitzuumfassen; um bei der geometrischen Reihe (§ 2) das Anfangsglied 1 ebenfalls als Potenz erscheinen zu lassen, u. a. m.

dabei so, dass man s_n mit g multipliziert, wodurch auf der rechten Seite von (2) jedes Glied, mit Ausnahme des letzten, in das ihm rechts benachbarte übergeht, das letzte aber, g^{n-1}, in g^n. Bildet man dann die Differenz $s_n - s_n g = s_n(1-g)$, so zerstören sich alle Glieder bis auf 1 und g^n:

$$(3) \qquad s_n - s_n g = s_n\,(1-g) = 1 - g^n,$$

und man erhält die fundamentale Formel für die Summe einer endlichen geometrischen Reihe:

$$(I) \quad s_n = 1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1} = \frac{1-g^n}{1-g} = \frac{g^n - 1}{g-1},$$

wie man auch sofort wieder durch algebraische Division (s. diese Sammlung Bd. 6, Abschn. VII) von $1-g$ in $1-g^n$ verifiziert. Die Formel versagt nur dann, wenn $g = 1$, da

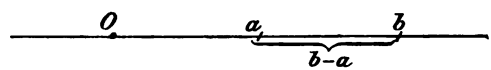


Fig. 1.

alsdann der Nenner der rechten Seite von I verschwindet; in diesem besonderen Falle erhält man aber unmittelbar

$$(4) \qquad s_n = \overbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}^{n\text{mal}} = n.$$

Das zur Ableitung von I eingeschlagene Verfahren macht auf den ersten Anblick einen künstlichen Eindruck; man kann ihm aber eine tiefere Bedeutung abgewinnen.

Wir bedienen uns dabei mit Vorteil einer aus den Elementen (s. diese Sammlung Bd. 1 § 22) geläufigen graphischen Darstellung, indem wir auf einer festen Geraden oder „Achse", von einem beliebig gewählten „Anfangspunkt" oder „Nullpunkt" O aus jede Zahlgrösse a als Strecke von der Länge a abgetragen denken, die positiven a nach rechts, die negativen nach links. Der Endpunkt der Strecke darf selbst als Repräsentant der Zahlgrösse a gelten und somit als „Punkt a" bezeichnet werden. Ist $b(>a)$ ein zweiter Punkt, so ergiebt die stets positive Differenz $b - a$ der Zahlgrössen b und a die Länge der „Strecke" von a bis b (s. Fig. 1).

Sei zuvörderst $g > 1$, so denken wir uns in der angegebenen Weise successive die — an Grösse fortwährend

zunehmenden — Potenzen von g: $1, g, g^2, g^3, \ldots g^{n-1}, g^n$ als Längen aufgetragen, dann bietet sich die Anschauung dar, dass die Strecke von 1 bis g^n durch die „eingeschalteten“ Punkte $g, g^2, g^3, \ldots g^{n-1}$ in n „Teilstrecken“ oder „Intervalle“ zerlegt wird (s. Fig. 2), deren Längen resp. $g-1, g^2-g, g^3-g^2, \ldots g^n-g^{n-1}$ sind. Da nun die ganze Strecke, d. i. g^n-1 gleich der Summe ihrer Teilstrecken ist, so ergiebt sich unmittelbar:

$$(5)\quad g^n-1=(g-1)+(g^2-g)+(g^3-g^2)+\ldots+(g^n-g^{n-1})$$
$$=(g-1)(1+g+g^2+\ldots+g^{n-1}),$$

das ist aber die Formel (I).

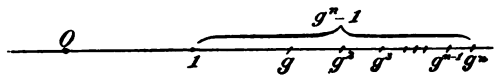


Fig. 2.

Wendet man das nämliche Verfahren auf den Fall an, dass sich g zwischen 0 und 1 befindet, so erhält man eine analoge Figur (s. Fig. 3), nur dass — da die Glieder der Reihe $1, g, g^2, g^3, \ldots g^{n-1}, g^n$ an Grösse fortwährend ab-

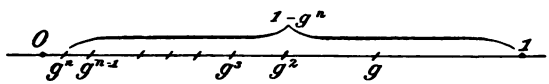


Fig. 3.

nehmen — die Punkte $g, g^2, g^3, \ldots g^{n-1}, g^n$ links von 1 aufeinander folgen. Die ganze Strecke von g^n bis 1, i. e. $1-g^n$ wird jetzt in die n Teilstrecken $1-g$, $g-g^2$, g^2-g^3, $\ldots$, $g^{n-1}-g^n$ zerlegt, und es kommt:

$$(5a)\quad 1-g^n=(1-g)+(g-g^2)+(g^2-g^3)+\ldots+(g^{n-1}-g^n)$$
$$=(1-g)(1+g+g^2\ldots+g^{n-1}),$$

das ist wiederum die Formel I.

Ist dagegen g negativ, $=-\gamma$, so hat man nur die Potenzen $\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \ldots \gamma^{n-1}, \gamma^n$, wie oben aufzutragen, und nachträglich wieder γ durch $-g$ zu ersetzen.

Eine der ersten Anwendungen der Summenformel (I) sei ein neuer Beweis der Sätze I und II des § 1, der deren inneren Grund deutlicher hervortreten lässt.

Sei wieder $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1+p}$ $(p > 0)$ vorgelegt, so bezeichne man $\sqrt[n]{a}$ mit $g(>1)$, i. e.

$$a = 1 + p = g^n, \tag{6}$$

so wird nach (I):

$$a - 1 = p = g^n - 1 = (g-1)(1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1}), \tag{7}$$

mithin, da $g > 1$, nach (4):

$$p > (g-1)(1 + 1 + 1 + \ldots + 1), \text{ i. e. } > n(g-1), \tag{8}$$

woraus, wie in § 1, sofort folgt, dass bei beliebig wachsendem n die Grösse $g - 1 = \sqrt[n]{a} - 1$ unter jede Grenze sinken muss, d. i. aber der Satz II des § 1.

Das hier zu Grunde liegende Beweisprinzip lässt sich noch greifbarer gestalten, wenn man wiederum die graphische Darstellung der Fig. 2 heranzieht. Eine feste Strecke von 1 bis $g^n = a$ soll überhaupt in eine stets wachsende Anzahl von Intervallen zerlegt werden; dies ist offenbar nur so möglich, dass mindestens eines dieser Intervalle unter jede Grenze sinken muss. Nun wird im vorliegenden Falle irgend eines der Intervalle der Länge nach durch das Produkt aus $g - 1$ mit einer Potenz $g^k(>1)$ von g angegeben, somit muss der erste Faktor $g - 1$ gegen Null konvergieren. Aus derselben Quelle (I) fliesst aber auch der Satz I des § 1, dass a^n, falls sich a zwischen 0 und 1 befindet, den Grenzwert Null hat. Denn schreibt man jetzt (I) in der Gestalt (5a):

$$1 - a^n = (1-a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}), \tag{5a}$$

so ist rechter Hand der erste Faktor $1 - a$ eine gegebene feste Zahlgrösse zwischen 0 und 1, während im zweiten Faktor $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$ die Glieder jedenfalls successive abnehmen. Würde nun a^n, also auch a^{n-1}, bei beliebig wachsendem n nicht gegen Null konvergieren, also stets grösser bleiben als eine feste, wenn auch noch so kleine (positive) Grösse ε, so wäre um so mehr auch

$$a^{n-2} > \varepsilon,\ a^{n-3} > \varepsilon,\ \ldots\ a > \varepsilon,\ 1 > \varepsilon,$$

somit nach (5a):

$$\frac{1 - a^n}{1 - a} > n\varepsilon. \tag{9}$$

Das ist aber ein Widerspruch, da rechter Hand $n\varepsilon$ den Grenzwert ∞ hätte, während doch linker Hand eine Grösse steht, deren Wert für jedes n zwischen 0 und $\frac{1}{1-a}$ liegt.

Bedient man sich auch hier der graphischen Darstellung, nämlich der Figur 3, so erkennt man, dass das zu Grunde liegende Beweisprinzip genau dasselbe ist, wie soeben bei der Betrachtung des Satzes II, dass nämlich eine feste Strecke von 0 bis 1 in eine unbegrenzte Anzahl von Intervallen zerlegt werden soll und demnach mindestens eines dieser Intervalle den Grenzwert Null besitzen muss.

Nun hat irgend eines der Intervalle die Grösse $(1-a)a^k$, d. i. ein Produkt, dessen erster Faktor einen festen Wert zwischen 0 und 1 hat, während der zweite Faktor nur dadurch gegen Null konvergieren kann, dass der Exponent k über alle Grenzen wächst.

Nunmehr wenden wir auf die Summe (I) der endlichen geometrischen Reihe den Satz I des § 1 an, indem wir g positiv oder negativ, dem absoluten Werte $|g|$*) nach jedoch kleiner als Eins wählen und (I) in der Gestalt schreiben:

$$\text{(Ia)} \qquad s_n = \frac{1}{1-g} - g^n \cdot \frac{1}{1-g}.$$

Lässt man jetzt n unbegrenzt wachsen, so hat g^n, mithin auch $g^n \cdot \frac{1}{1-g}$ den Grenzwert Null und es ergiebt sich:

> II. „Die Summe s_n (I) der geometrischen Reihe $1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1}$ hat, wofern sich der Wert von g zwischen $+1$ und -1 befindet, bei beliebig wachsendem n den Grenzwert $\frac{1}{1-g}$."

Man bezeichnet die geometrische Reihe

$$1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1} + \ldots$$

bei unbeschränkt wachsendem n als „unbegrenzt" oder „unendlich" und den Grenzwert s_n der Summe selbst als

*) Zwei senkrechte Striche bezeichnen, wie üblich, den absoluten — d. h. positiven — Wert der eingeklammerten Zahlgrösse.

„Summe“ s der unendlichen Reihe. Dann lautet der Satz II kürzer:

IIa. „Die Summe s der unbegrenzten geometrischen Reihe $1 + g + g^2 + g^3 + \ldots + g^n + \ldots$ hat für $|g| < 1$ den Wert $\frac{1}{1-g}$:

$$s = \frac{1}{1-g}.“$$

Man bemerkt überdies gemäss (Ia), dass bei positivem g stets $s_n > \frac{1}{1-g}$, sich also bei wachsendem n dem Grenzwert $s = \frac{1}{1-g}$ von oben her beliebig nähert; ist dagegen g negativ, so wird, je nachdem n gerade oder ungerade ist, $s_n > \frac{1}{1-g}$ resp. $< \frac{1}{1-g}$, d. h. in Worten: Der Wert s_n schwankt („oscilliert“) für negatives g bei wachsendem n abwechselnd um den Grenzwert $s = \frac{1}{1-g}$ hin und her, indem er sich dabei diesem Grenzwert unbegrenzt nähert.

Wir brechen hiermit die Untersuchung der unendlichen geometrischen Reihe ab, werden aber bei dem systematischen Studium der unendlichen Reihen genauer darauf zurückkommen.

2. Stetigkeit der Potenz bei fester Basis.

Dass von zwei Potenzen mit derselben Basis a (> 0) die grössere zum grösseren resp. kleineren Exponenten gehört, je nachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist, zeigt die elementare Potenzlehre (s. diese Sammlung Bd. 1, Abschn. VI). Wir fragen hier nach der Aenderung, die eine Potenz a^m erleidet, wenn der Exponent m um eine beliebig kleine Grösse ε vermehrt wird. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall $a > 1$, $m > 0$, $\varepsilon > 0$, da die anderen Fälle einer genau analogen Behandlung fähig sind. Nach den Elementen ist:

$$(10) \qquad a^{m+\varepsilon} - a^m = a^m a^\varepsilon - a^m = a^m(a^\varepsilon - 1).$$

Es mag jetzt ε beliebig abnehmen, so wird es in jeder augenblicklichen Lage zwischen den reziproken Werten $\frac{1}{n}$ und

$\frac{1}{n+1}$ zweier successiver natürlicher Zahlen n und $n+1$ enthalten sein, falls es nicht gerade selbst gleich einem solchen Werte $\frac{1}{n}$ ist. Da also $\varepsilon \leqq \frac{1}{n}$, mithin auch $a^{\varepsilon} \leqq a^{\frac{1}{n}}$ ist, folgt aus (10):

$$a^{m+\varepsilon} - a^m \leqq a^m (a^{\frac{1}{n}} - 1). \tag{11}$$

Nach Satz II des § 1 sinkt $a^{\frac{1}{n}} - 1$ bei wachsendem n unter jede Grenze, somit auch die linke Seite von (11).

Es lässt sich aber noch genauer der Wert von n und damit auch von ε derart bestimmen, dass $a^{m+\varepsilon} - a^m$ „von vorgeschriebener Kleinheit wird", d. i. kleiner, als eine noch so kleine vorgegebene (positive) Zahlgrösse η. In der That wird dieser Forderung Genüge geschehen, falls man gemäss (11) $a^m(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \eta$ wählt, d. i.

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{\eta}{a^m}. \tag{12}$$

Setzt man, wie in § 1 (6), $a = 1 + p$ $(p > 0)$, so nimmt die Forderung (12) die Gestalt an:

$$1 + p < \left(1 + \frac{\eta}{a^m}\right)^n. \tag{13}$$

Nun ist nach Formel (8) § 1:

$$\left(1 + \frac{\eta}{a^m}\right)^n > 1 + \frac{n\eta}{a^m}; \tag{14}$$

die in Rede stehende Forderung wird daher um so mehr erfüllt sein, wenn verlangt wird, dass:

$$1 + \frac{n\eta}{a^m} > 1 + p, \text{ i. e. } n > \frac{pa^m}{\eta} \tag{15}$$

sein soll: eine derartige natürliche Zahl n lässt sich aber jederzeit bestimmen*), wie klein auch η gewählt sein mochte. Für jedes ε, das $< \frac{1}{n}$ angenommen wird, wird dann um so mehr:

$$a^{m+\varepsilon} - a^m < \eta. \tag{16}$$

*) Für die praktische Rechnung wird man sich der Logarithmentafeln bedienen (s. Bd. 1 § 32).

Wir drücken das Ergebnis mit den Worten aus:

III. Die Potenz $a^m (a > 0)$ ist bei fest gedachter Basis *„stetig“*, d. h. einer *„unendlich kleinen“* Aenderung des Exponenten entspricht auch eine unendlich kleine Aenderung des Wertes der Potenz, in dem Sinne, dass, wenn sich die Aenderung der Potenz, abgesehen vom Vorzeichen, unter einer beliebig vorgegebenen noch so kleinen (positiven) Zahlgrösse η befinden soll, sich stets eine dieser Forderung genügende Aenderung ε des Exponenten angeben lässt, derart, dass jede noch kleinere Aenderung des Exponenten die gestellte Forderung erst recht erfüllt.“

Auf den allgemeinen Begriff der Stetigkeit kommen wir in § 8 zurück.

Das bei der Herleitung von III benutzte Hilfsmittel, die Grösse ε zwischen zwei Werte $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n+1}$ einzuschliessen, dient auch dazu, die Sätze I und II des § 1 dahin zu verallgemeinern, dass die dort auftretende Grösse n nicht nur wie eine natürliche Zahl, sondern ganz beliebig (positiv) ins Unendliche wächst. Wir geben dabei dem Beweise eine Fassung, die auch später (§ 12), bei einem ähnlichen Beweise, zur Anwendung gelangen wird.

Sei also unter ω, dem Exponenten der Potenz $a^\omega (a > 0)$ eine beliebig wachsende (positive) Zahlgrösse verstanden, so wird ω in jeder augenblicklichen Lage zwischen n und $n+1$ befindlich sein, wo n eine natürliche Zahl bedeutet: der besondere Fall, dass ω gerade gleich n ist, kann, weil in § 1 behandelt, jetzt beiseite gelassen werden. Dann folgt aus:

$$n < \omega < n + 1 \tag{17}$$

sofort nach den Elementen:

$$a^n < a^\omega < a^{n+1} \text{ resp. } a^{n+1} < a^\omega < a^n, \tag{18}$$

je nachdem $a > 1$ oder $a < 1$ gewählt war.

Mit ω wächst auch n beliebig; da aber dann nach § 1 die beiden Seiten der Ungleichung (18) den Grenzwert ∞ resp.

0 haben, je nachdem $a > 1$ oder < 1 ist, so gilt das nämliche auch von a^{ω}.

Ganz analog erledigt sich die Verallgemeinerung des Satzes II des § 1. Für eine beliebig abnehmende Grösse ε, als Exponent von $a^{\varepsilon}(a > 0)$ hat man:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon < \frac{1}{n}, \tag{19}$$

$$a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\varepsilon} < a^{\frac{1}{n}}, \text{ resp. } a^{\frac{1}{n}} < a^{\varepsilon} < a^{\frac{1}{n+1}}, \tag{20}$$

je nachdem $a > 1$ oder < 1 ist. Da aber $a^{\frac{1}{n}}$ und $a^{\frac{1}{n+1}}$ den Grenzwert 1 besitzen, so auch a^{ε}. Und da $a^{-\varepsilon} = \frac{1}{a^{\varepsilon}}$, so gilt diese Verallgemeinerung des Satzes II (§ 1) auch dann noch, wenn der Exponent negativ beliebig abnimmt.

§ 3. Anwendungen auf Geometrie.

Quadratur von Parabeln und verwandten Kurven.

Auf Grund des Satzes II (§ 1): $a^0 = 1$ und der Formel (1) (§ 2) für die Summe der geometrischen Reihe sind wir bereits in der Lage, geometrische Aufgaben zu bewältigen, die über die Elemente der Mathematik hinausgehen.

Es werde zuerst die sogenannte „Quadratur der Parabel“ behandelt.

Man errichte (s. Fig. 4) in zwei Punkten*) a, b der Scheiteltangente einer Parabel (s. diese Sammlung Bd. 8, Abschn. VIII) Lote, bis sie die Parabel in den Punkten P, Q treffen. Diese Lote, nebst dem von P und Q begrenzten Parabelbogen und dem Stück $\overline{ab}$ der Scheiteltangente begrenzen einen Flächeninhalt**) $J_a^b = J$, dessen Grösse ermittelt werden soll. Die Berechnung von J wird sich, wie bei analogen Kreisaufgaben (s. § 4 und diese Sammlung Bd. 2)

*) Der Bequemlichkeit halber werden die Punkte vorerst (s. Ende von § 3) auf der positiven Seite der Abscissenachse angenommen.

**) Eine präcise, analytische Definition des Begriffes „Flächeninhalt“ wird in der Integralrechnung (s. diese Sammlung Bd. 11) gegeben werden.

darauf gründen müssen, dass man J zwischen zwei Grenzen einschliesst, die einander beliebig genähert werden können.

Eine erste, roheste Annäherung derart ergiebt sich vermöge der beiden Rechtecke, die $\overline{ab}$ zur Grundlinie und P resp. Q als eine weitere Ecke besitzen; der Unterschied dieser beiden Rechtecke ist selbst ein Rechteck, nämlich das mit den Gegenecken P, Q. Schaltet man jetzt, um die erste Annäherung allmählich zu verfeinern, zwischen a und b auf Scheiteltangente eine Anzahl weiterer Punkte ein, errichtet wiederum in ihnen Lote, bis sie die Parabel treffen, so zerlegt sich dadurch der Flächeninhalt J in eine Anzahl von

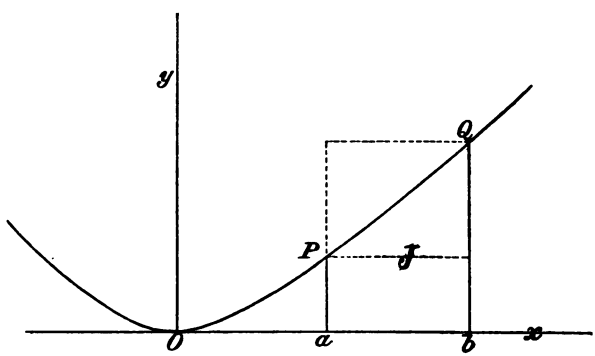


Fig. 4.

„Flächenstreifen", als deren Summe J erscheint. Wendet man auf jeden einzelnen Streifen die obige Eingrenzungsmethode an, und addiert sodann, so erscheint J wiederum zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, nämlich zwischen der Summe der zu kleinen Rechtecke einerseits und der Summe der zu grossen Rechtecke andererseits; ersichtlich ist aber der Unterschied zwischen den beiden neuen Grenzen geringer geworden, als bei dem ersten Ansatze, und es lässt sich erwarten, dass bei geeigneter unbegrenzter Vermehrung der einzuschaltenden Punkte der fragliche Unterschied schliesslich beliebig klein gemacht werden kann.

Welches wird die einfachste Rechnung sein, durch die *das in der Idee skizzierte Verfahren auf eine sichere Grund-*
beia- gestellt wird? Bezieht man (s. l. c. § 38) die Parabel auf

ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Abscissenachse die Scheiteltangente, dessen Ordinatenachse die Achse der Parabel ist, so lautet die „Gleichung" der Parabel:

$$y = \frac{x^2}{2p}, \tag{1}$$

wo p der sogenannte „Parameter" der Parabel ist.

Der Bequemlichkeit halber wählen wir vorderhand die Längeneinheit so, dass $p = \frac{1}{2}$ wird, also die Gleichung der Parabel sich vereinfacht zu:

$$y = x^2. \tag{1a}$$

Die Abscissen der Punkte a, b seien selbst mit a, b bezeichnet, die Strecke von a bis b i. e. $b - a$ mit h.

Der nächstliegende Gedanke wäre der, die Strecke h in eine Anzahl n gleicher Teile zu teilen; da aber die zugehörige Rechnung (s. unten) auf eigenartige Schwierigkeiten stösst, versuchen wir es, gestützt auf die Betrachtung des § 2, vorerst mit der Einteilung von h „nach dem Prinzip der geometrischen Reihe", d. h. man schalte zwischen a und b der Reihe nach die Punkte ak, ak^2, ak^3, ..., ak^{n-1} ein, und wähle die Grösse k so, dass ak^n mit dem Endpunkte b von h zusammenfällt, i. e. wir setzen:

$$k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}. \tag{2}$$

Die in den Zwischenpunkten ak, ak^2, ..., ak^{n-1} errichteten Lote zerlegen die Fläche J in n Streifen mit den respektiven Grundlinien:

$$\begin{cases} ak - a = a(k-1),\ ak^2 - ak = ak(k-1), \\ ak^3 - ak^2 = ak^2(k-1),\ \ldots, \\ ak^n - ak^{n-1} = ak^{n-1}(k-1), \end{cases} \tag{3}$$

die also, abgesehen von dem gleichmässig wiederkehrenden Faktor $a(k-1)$ eine geometrische Reihe, nämlich $1, k, k^2, \ldots$ $\ldots, k^{n-1}$ bilden. Die zu den links gelegenen Endpunkten der Teilstrecken (3) gehörigen Parabelordinaten haben nach (1a) die Werte:

$$a^2,\ (ak)^2,\ (ak^2)^2,\ \ldots\ (ak^{n-1})^2, \tag{4}$$

dagegen die zu den rechts gelegenen Endpunkten gehörigen die Werte:

$$(5) \qquad (ak)^2,\ (ak^2)^2,\ (ak^3)^2,\ \ldots\ (ak^n)^2.$$

Das Produkt aus der Länge irgend einer Teilstrecke (3) mit der Länge der zugehörigen „linken" Ordinate (4), resp. der rechten Ordinate (5), liefert den Inhalt eines Rechteckes, der stets kleiner resp. stets grösser ist, als der Inhalt des über der Teilstrecke stehenden Flächenstreifens. Summiert man demnach die Inhalte der Rechtecke jeder der beiden Arten, so wird J in zwei Grenzen eingeschlossen, wie folgt:

$$(6) \qquad a^3(k-1)\ \{1+k^3+(k^3)^2+(k^3)^3+\ldots+(k^3)^{n-1}\} < J$$
$$< a^3(k-1)k^2\{1+k^3+(k^3)^2+(k^3)^3+\ldots+(k^3)^{n-1}\}.$$

Die innerhalb der geschweiften Klammern stehende Summe ist die einer endlichen geometrischen Reihe, deren Wert s_n man nach (I) § 2 erhält, wenn man daselbst die Grösse g durch k^3 ersetzt:

$$(7) \qquad s_n = \frac{(k^3)^n - 1}{k^3 - 1} = \frac{(k^n)^3 - 1}{k^3 - 1},$$

mithin nach (2):

$$(7a) \qquad s_n = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{b^3 - a^3}{k^3 - 1}.$$

Setzt man diesen Wert von s_n in (6) ein, hebt den Faktor a^3 weg und dividiert die ganze Ungleichung mit dem (positiven) Faktor $k-1$, so wird aus (6):

$$(8) \qquad (b^3 - a^3)\frac{1}{\frac{k^3-1}{k-1}} < J < (b^3 - a^3)\frac{k^2}{\frac{k^3-1}{k-1}},$$

oder, da $\frac{k^3-1}{k-1}$, wiederum nach (I) § 2, die Summe der geometrischen Reihe $1 + k + k^2$ ist:

$$(9) \qquad (b^3 - a^3)\frac{1}{1+k+k^2} < J < (b^3 - a^3)\frac{k^2}{1+k+k^2}.$$

Nunmehr haben wir uns davon zu überzeugen, dass bei beliebig wachsendem n die positive Differenz D der beiden Seiten der Ungleichung (9), d. i.:

$$(10)\quad D=(b^3-a^3)\frac{k^2-1}{1+k+k^2}=(b^3-a^3)\cdot\frac{1+k}{1+k+k^2}(k-1)$$

unter jede Grenze sinkt. Der Bruch $\frac{1+k}{1+k+k^2}$ ist sicher <1, somit:

$$(11)\qquad D<(b^3-a^3)(k-1).$$

Da nach (2) $k=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, so hat $k-1$ nach Satz II, § 1 den Grenzwert Null, und damit auch D, da b^3-a^3 ein gegebener fester Faktor ist. Zugleich aber erhalten die in (9) auftretenden Brüche $\frac{1}{1+k+k^2}$, $\frac{k^2}{1+k+k^2}$ den Grenzwert $\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$*), und es ergiebt sich schliesslich für den gesuchten Inhalt $J=J_a^b$:

$$(12)\qquad J_a^b=\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{b-a}{3}(a^2+ab+b^2).$$

Hinterher kann man von der in (1a) gemachten Annahme $2p=1$ absehen und die ursprüngliche Gleichung (1) der Parabel zu Grunde legen; es ist dann nur in (4) und (5) jede Ordinate, und damit jede der beiden Seiten der Ungleichung (6) mit dem Faktor $\frac{1}{2p}$ zu versehen, so geht (12) unmittelbar über in:

$$(12a)\qquad J_a^b=\frac{1}{2p}\,\frac{b^3-a^3}{3}.$$

Um das in (12) niedergelegte Ergebnis in einen einfachen geometrischen Satz zu kleiden, lasse man in (12) die

*) Dass $\frac{1}{3}$ der Grenzwert von $\frac{1}{1+k+k^2}$, lässt sich auch so bestätigen. Man hat:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{1+k+k^2}=\frac{1+k+k^2-3}{1+k+k^2}=\frac{(k-1)+(k^2-1)}{1+k+k^2}$$
$$=(k-1)\cdot\frac{1+k+1}{1+k+k^2},$$

mithin $<(k-1)$, da $k>1$. Der Grenzwert von $k-1$ ist aber Null.

Abscisse a gegen Null, d. h. den Punkt a gegen den Scheitelpunkt O der Parabel (1) konvergieren. Dann spezialisiert sich (12) zu:

$$J_0^b = \frac{1}{2p} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{b^2}{2p}. \tag{13}$$

Hiergegen lässt sich allerdings der Einwand erheben, dass der in (12) vorgenommene Grenzprozess (a unendlich klein) nicht ohne weiteres statthaft ist, da die der Herleitung von (12) zu Grunde liegende Teilung der Strecke von a bis b nach dem Prinzip der geometrischen Reihe: $a, ak, ak^2, \ldots, ak^{n-1}, ak^n = b$ versagt, wenn a gegen Null konvergiert. Man kann sich aber auf indirektem Wege von der Richtigkeit der Formel (13) überzeugen. Wäre (13) nicht für jeden beliebigen Wert von b gültig, so könnte auch die durch Subtraktion entstehende Formel:

$$J_0^b - J_0^a = \frac{1}{2p}\frac{b^3}{3} - \frac{1}{2p}\frac{a^3}{3} = \frac{1}{2p}\frac{b^3 - a^3}{3} \tag{14}$$

nicht für zwei beliebige Werte a, b richtig sein; das ist aber ein Widerspruch, da, wie ein Blick auf die Figur lehrt, $J_0^b - J_0^a$ nichts anderes ist, wie der Inhalt J_a^b selbst, und die rechten Seiten von (12) und (14) übereinstimmen. Hieraus geht zugleich hervor, dass die Formel (13) in Wirklichkeit ebenso allgemein ist, wie (12), da (12) aus (13) folgt.

Man schreibe in (13) für die beliebige Abscisse b lieber x, so ist nach (1) $y = \frac{x^2}{2p}$, und (13) nimmt die einfachere Gestalt an:

$$J_0^x = \frac{xy}{3}. \tag{15}$$

Durch (15) ist der Satz, den man Archimedes zuschreibt, bewiesen:

> I. „Das von der Achse einer Parabel, ihrer Scheiteltangente und den zu beiden Geraden durch einen Parabelpunkt gelegten Parallelen begrenzte Rechteck wird durch den Parabelbogen dem Inhalte nach im Verhältnis 1 : 2 geteilt, und zwar so, dass das nach der Scheiteltangente hin liegende Teilstück das kleinere ist."

Hiermit ist zugleich die Quadratur der Parabel für den andern Fall erledigt, wenn man die Achse der Parabel zur Abscissenachse wählt und die Scheiteltangente zur Ordinatenachse, wenn also die Gleichung der Parabel die sogenannte „Scheitelgleichung“ ist:

$$y = \sqrt{2px}. \tag{16}$$

Errichtet man jetzt im Punkte x die positive Ordinate y, so ist das von Abscisse x, Ordinate y und der Parabel begrenzte Flächenstück J_0^x nach I gleich $\frac{2}{3}xy$, also nach (16):

$$J_0^x = \frac{2x}{3}\sqrt{2px} = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}, \tag{17}$$

und entsprechend das zu zwei beliebigen Abscissen a, $b(>a)$ gehörige Flächenstück J_a^b:

$$J_a^b = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}). \tag{18}$$

Es ist oben betont worden, dass die nächstliegende Einteilung der Strecke von a bis b die in n gleiche Teile gewesen wäre, oder, wie man auch sagen kann, „nach dem Prinzip der arithmetischen Reihe“, d. h. so, dass für $b - a = h$, die Teilpunkte:

$$a,\ a + \frac{h}{n},\ a + \frac{2h}{n},\ a + \frac{3h}{n},\ \ldots,\ a + \frac{n-1}{n}h,$$

$$a + \frac{n}{n}h = a + b - a = b$$

entstehen. Obgleich die jetzt zur Ableitung von (12a) erforderliche Rechnung weniger durchsichtig ist, als die oben durchgeführte, so ist doch eine Vergleichung instruktiv.

Die n Teilstreifen von J haben jetzt alle die nämliche Grundlinie $\frac{h}{n}$; die „linken“ Ordinaten sind successive:

$$a^2,\ \left(a + \frac{h}{n}\right)^2,\ \left(a + \frac{2h}{n}\right)^2,\ \ldots,\ \left(a + \frac{(n-1)h}{n}\right)^2, \tag{19}$$

die „rechten“ Ordinaten dagegen:

$$(20)\quad \left(a+\frac{h}{n}\right)^2,\ \left(a+\frac{2h}{n}\right)^2,\ \left(a+\frac{3h}{n}\right)^2,\ \ldots,\ \left(a+\frac{nh}{n}\right)^2.$$

Schliesst man wiederum den gesuchten Flächeninhalt J durch die Summe der zu kleinen und die Summe der zu grossen Rechtecke ein, so kommt nach leichter Zusammenfassung:

$$(21)\quad \frac{h}{n}\left[na^2+\frac{2ah}{n}\{1+2+3+\ldots+(n-1)\}\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{n^2}\{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\}\right]<J$$
$$<\frac{h}{n}\left[na^2+\frac{2ah}{n}\{1+2+3+\ldots+n\}\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{n^2}\{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\}\right].$$

Die (positive) Differenz D der beiden Seiten der Ungleichung (21) ist sofort zu bilden, nämlich:

$$(22)\quad \frac{h}{n}\left(\frac{2ah}{n}\cdot n+\frac{h^2}{n^2}\cdot n^2\right)=\frac{h^2}{n}(2a+h),$$

lässt also unmittelbar erkennen, dass sie mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

Nicht ganz so leicht ist aber die Ermittelung des Grenzwertes einer der beiden Seiten von (21), etwa der linken. Wir bedürfen dazu der beiden Formeln aus der elementaren Arithmetik (s. diese Sammlung, Bd. 5):

$$(23)\quad 1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

{d. i. die Summe der „arithmetischen Reihe"},

$$(24)\quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Es wird nützlich sein, für die Ableitung dieser Formeln ein Verfahren einzuschlagen, das sich ohne Mühe auf die vielfach vorkommende Aufgabe, die Summe der k^{ten} $(k=3,4,\ldots)$ Potenzen der ersten $n-1$ natürlichen Zahlen: $1^k+2^k+3^k+\ldots+(n-1)^k$ übertragen lässt. Man hat die Identitäten:

$$(25)\quad \begin{cases} n^2 = \{(n-1)+1\}^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 \\ (n-1)^2 = \{(n-2)+1\}^2 = (n-2)^2 + 2(n-2) + 1 \\ (n-2)^2 = \{(n-3)+1\}^2 = (n-3)^2 + 2(n-3) + 1 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^2 = \{\quad 1+1\}^2 = \quad 1^2 + 2\cdot \quad 1 + 1. \end{cases}$$

Addiert man, so zerstören sich alle Quadrate bis auf n^2 links, 1^2 rechts, und es ergiebt sich:

$$\begin{aligned} n^2 &= 1^2 + 2\{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\} + n - 1 \\ &= n \quad + 2\{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\} \end{aligned}$$

und damit die Formel (23).

Ganz analog hat man, auf Grund des binomischen Satzes (s. diese Sammlung, Bd. 5 oder diesen Band § 6):

$$(26)\quad \begin{cases} n^3 = \{(n-1)+1\}^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n-1)^3 = \{(n-2)+1\}^3 = (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\ (n-2)^3 = \{(n-3)+1\}^3 = (n-3)^3 + 3(n-3)^2 + 3(n-3) + 1 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^3 = \{\quad 1+1\}^3 = \quad 1^3 + \quad 3\cdot 1^2 + \quad 3\cdot 1 + 1. \end{cases}$$

Addiert man, so zerstören sich die Kuben bis auf n^3 links, 1^3 rechts, und es ergiebt sich:

$$\begin{aligned} n^3 = (1^3 + n - 1) &+ 3\{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\} \\ &+ 3\{1 \quad + 2 \quad + \ldots + (n-1)\}, \end{aligned}$$

und mit Einsetzung des Wertes (23):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left\{n^3 - n - \frac{3(n-1)n}{2}\right\} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 \\ &= \frac{2n(n^2-1) - 3n(n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)}{6}(2n + 2 - 3) \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \end{aligned}$$

d. i. aber die Formel (24).

Mit Hilfe von (23) und (24) formt sich nunmehr die linke Seite der Ungleichung (21) um in:

$$(27)\quad \frac{h}{n}\left[na^2 + \frac{2ah}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{h^2}{n^2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$
$$= \frac{h}{6}\left[6a^2 + 6ah + 2h^2 - \frac{3h}{n}(2a+h) + \frac{h^2}{n^2}\right],$$

konvergiert also bei beliebig wachsendem n gegen den Grenzwert:

$$(28)\qquad J = \frac{h}{3}(3a^2 + 3ah + h^2).$$

Setzt man hier für h seinen Wert $b - a$, so lehrt eine einfache Umrechnung, dass sich in der That die rechte Seite von (28) auf die rechte Seite von (12a) reduziert.

Auf Grund der Teilung einer Strecke nach dem Prinzip der geometrischen Reihe und des Satzes II § 1 lässt sich das Problem der Quadratur auch für weniger einfache Kurven lösen. Zu dem Behuf ziehen wir zuvörderst die sogenannten „höheren Parabeln“ in Betracht, deren Gleichung ist:

$$(29)\qquad y = x^m,$$

wo m eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl ist.

Es werde zuerst der Fall eines positiven m behandelt.

Indem man, wie oben bei der gewöhnlichen Parabel (1a), von zwei positiven Abscissen a, $b(>a)$ ausgeht, behalten die Grundlinien der n Teilstreifen des Flächeninhaltes J ihre Werte (3):

$$(3)\quad a(k-1),\ ak(k-1),\ ak^2(k-1),\ \ldots,\ ak^{n-1}(k-1);$$

die Längen der linken Ordinaten werden jetzt:

$$(30)\qquad a^m,\ (ak)^m,\ (ak^2)^m,\ \ldots,\ (ak^{n-1})^m,$$

die Längen der rechten Ordinaten:

$$(31)\qquad (ak)^m,\ (ak^2)^m,\ (ak^3)^m,\ \ldots,\ (ak^n)^m.$$

Die Einschliessung des gesuchten Inhaltes J zwischen den Summen der zu kleinen resp. zu grossen Rechtecke liefert:

(32) $a^{m+1}(k-1)\{1+k^{m+1}+(k^{m+1})^2+\ldots+(k^{m+1})^{n-1}\}<J$
$<a^{m+1}(k-1)k^m\{1+k^{m+1}+(k^{m+1})^2+\ldots+(k^{m+1})^{n-1}\}.$

Die geschweifte Klammer hat als Summe einer geometrischen Reihe nach (I) § 2 und, da nach (2) $k^n=\frac{b}{a}$, den Wert:

(33) $$\frac{(k^{m+1})^n-1}{k^{m+1}-1}=\frac{(k^n)^{m+1}-1}{k^{m+1}-1}=\frac{1}{a^{m+1}}\cdot\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{k^{m+1}-1},$$

so dass (32) übergeht in:

(34) $$(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{1}{\frac{k^{m+1}-1}{k-1}}<J<(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{k^m}{\frac{k^{m+1}-1}{k-1}},$$

oder, da $\frac{k^{m+1}-1}{k-1}$ die Summe der geometrischen Reihe $1+k+k^2+\ldots+k^m$ ist, in:

(35) $$(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{1}{1+k+k^2+\ldots+k^m}<J$$
$$<(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{k^m}{1+k+k^2+\ldots+k^m}.$$

Die positive Differenz D beider Seiten der Ungleichung (35) ist, da wiederum nach der Formel der geometrischen Reihe $k^m-1=(1+k+k^2+\ldots+k^{m-1})(k-1)$ wird:

(36) $$D=(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{1+k+k^2+\ldots+k^{m-1}}{1+k+k^2+\ldots+k^m}(k-1),$$

oder, da $\frac{1+k+k^2+\ldots+k^{m-1}}{1+k+k^2+\ldots+k^m}$ sicher <1 ist:

(37) $$D<(b^{m+1}-a^{m+1})(k-1),$$

sinkt also nach II § 1 bei wachsendem n unter jede Grenze.

Zugleich nähert sich, da k den Grenzwert 1 besitzt, der Bruch $\frac{1}{1+k+k^2+\ldots+k^m}$ dem Grenzwert $\frac{1}{m+1}$, und es resultiert somit aus (35) für den gesuchten Inhalt $J=J_a^b$ der *Wert:*

$$J_a^b = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}. \tag{38}$$

Hier darf man, genau wie bei (12a), die Abscisse a gegen Null konvergieren lassen, und erhält für eine beliebige (positive) Abscisse x:

$$J_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{xy}{m+1}. \tag{39}$$

Mithin wird das Rechteck xy durch die höhere Parabel (29) im Verhältnis $1 : m$ geteilt (m positiv, ganz).

Ist die rechte Seite der Parabelgleichung (29) noch mit einem Zahlfaktor c behaftet: $y = cx^m$, so ist leicht zu sehen, dass sich die Formeln (38), (39) nur unwesentlich ändern, nämlich in:

$$J_a^b = c \cdot \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \quad J_0^x = c \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{xy}{m+1}. \tag{40}$$

Nur um ein weniges schwieriger gestaltet sich die Untersuchung des zweiten Hauptfalles, wo der Exponent m in (29) eine negative ganze Zahl ist, $= -\mu$, wo μ dann wieder eine natürliche Zahl bedeutet.

Bei negativem m nimmt die Kurve $y = x^m$ bei wachsendem (positiven) x fortwährend ab: das hat aber nur zur Folge, dass sich die beiden Seiten der Ungleichung (32) vertauschen. Es kommt dann nur noch auf die Ermittelung des in (34) auftretenden Grenzwertes $\frac{k^{m+1} - 1}{k - 1}$ an. Indem wir den Fall $m + 1 = 0$, i. e. $m = -1$ ausschliessen, ist auch $m + 1$ eine negative ganze Zahl, $= -\nu$. Dann wird:

$$\frac{k^{-\nu} - 1}{k - 1} = -\frac{1}{k^\nu} \cdot \frac{k^\nu - 1}{k - 1}. \tag{41}$$

Da mit k auch $k^\nu = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^\nu}$ den Grenzwert Eins hat, und der Bruch $\frac{k^\nu - 1}{k - 1}$ nach obigem den Grenzwert ν, so hat $\frac{k^{m+1} - 1}{k - 1}$ den Grenzwert $-\nu = m + 1$, also der reziproke Bruch den Grenzwert $\frac{1}{m+1}$. Und da auch $k^m = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-\mu}}$ mit k den Grenzwert Eins besitzt, so besitzt

jeder der beiden Faktoren von $b^{m+1} - a^{m+1}$ den Grenzwert $\frac{1}{m+1}$ und es resultiert für J_a^b wiederum die Formel (38).

In (38) ist der Nenner $m+1$ negativ, aber auch der Zähler, da b^{m+1} jetzt kleiner als a^{m+1} ausfällt.

Wir können endlich noch einen Schritt weiter gehen, und den Exponenten in $y = x^m$ als einen beliebig gegebenen positiven oder negativen Bruch voraussetzen. Es ist dann nur wieder der Grenzwert von $\frac{k^{m+1} - 1}{k - 1}$ festzustellen, wo auch $m+1$ ein beliebiger positiver oder negativer Bruch sein kann. Sei zuerst $m+1$ ein positiver Bruch, $= \frac{\alpha}{\beta}$, wo α, β natürliche Zahlen bedeuten.

Es wird jetzt:

$$(42) \qquad \frac{k^{m+1} - 1}{k - 1} = \frac{k^{\frac{\alpha}{\beta}} - 1}{k - 1} = \frac{\left(k^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\alpha} - 1}{k^{\frac{1}{\beta}} - 1} \cdot \frac{k^{\frac{1}{\beta}} - 1}{k - 1}.$$

Setzt man hier zur Abkürzung:

$$(43) \qquad k^{\frac{1}{\beta}} = \sqrt[\beta]{k} = \sqrt[\alpha]{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\beta}}} = l,$$

so haben k und l gleichzeitig den Grenzwert Eins: (42) geht über in:

$$(44) \qquad \frac{k^{m+1} - 1}{k - 1} = \frac{l^{\alpha} - 1}{l - 1} \cdot \frac{1}{\frac{l^{\beta} - 1}{l - 1}}.$$

Von den beiden Faktoren rechter Hand hat der erste den Grenzwert α, der zweite den Grenzwert $\frac{1}{\beta}$, also das Produkt den Grenzwert $\frac{\alpha}{\beta} = m + 1$. Somit bleibt auch in diesem Falle die Formel (38) erhalten.

Endlich sei $m+1$ negativ, $= -\frac{\alpha}{\beta}$, dann kommt unmittelbar:

$$(45) \qquad \frac{k^{m+1}-1}{k-1} = \frac{k^{-\frac{\alpha}{\beta}}-1}{k-1} = -\frac{1}{k^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{k^{\frac{\alpha}{\beta}}-1}{k-1},$$

und als Grenzwert $-\frac{\alpha}{\beta} = m+1$.

Fasst man zusammen, so erkennt man, dass, welchen ganzzahligen oder gebrochenen, positiven oder negativen Wert exkl. -1 der Exponent m in $y = x^m$ haben mag, der Bruch $\frac{k^{m+1}-1}{k-1}$, wo $k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, bei wachsendem n gegen den Wert $m+1$ konvergiert, und somit die Formel (38) ihre Gültigkeit behält.

Aber auch für den Ausnahmefall $m = -1$, d. i. die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel (s. diese Sammlung Bd. 8, § 46), deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind:

$$(46) \qquad y = \frac{1}{x}$$

lässt sich noch ein gewisses Ergebnis feststellen.

Denn in diesem Falle geht direkt aus (3), (30), (31) hervor, dass

$$(47) \qquad \frac{1}{k} \cdot n(k-1) < J < n(k-1).$$

Um hieraus den gesuchten Inhalt J zu entnehmen, müsste man den Grenzwert des Produktes $n(k-1)$ für wachsendes n ermitteln; es bietet sich also hier die Erscheinung eines Produktes dar, dessen einer Faktor $k-1$ gegen Null konvergiert, während der andere, n, über alle Grenzen wächst. Um auch in diesem Falle zu einem bestimmten Ergebnis zu gelangen, müsste vorerst genauer das Gesetz untersucht werden, nach dem sich $k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ der Grenze 1 nähert. Dies ist aber mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln noch nicht ausführbar; wir kommen in § 12 (IV) darauf näher zurück; es wird sich zeigen, dass J durch den sogenannten natürlichen Logarithmus von $\frac{b}{a}$ ausgedrückt wird.

Man beachte noch die Gestalt des Bruches $\frac{k^{m+1}-1}{k-1}$, für den wir im obigen auf Grund der geometrischen Reihe

den Grenzwert $m+1$ erhalten haben. Würde man direkt im Zähler, wie im Nenner k gegen Eins konvergieren lassen, so würden Zähler und Nenner gleichzeitig gegen Null konvergieren, d. h., es würde eine Bruchform erscheinen, bei der die gewöhnlichen Regeln der Arithmetik versagen (s. § 17 und das Beispiel (4) daselbst). Es wird bald deutlicher hervortreten, dass gerade die systematische Untersuchung derartiger Bruchformen eine Hauptaufgabe der Differentialrechnung ausmacht.

Ferner ist noch eine geometrische Eigentümlichkeit des Inhaltes J_a^b für die Kurven $y = x^m$ hervorzuheben, die sich auf einen abermaligen Grenzprozess stützt. Ist der Exponent m positiv, so wächst die Ordinate y zugleich mit der Abscisse x fortwährend; es ist daher evident, dass der Inhalt J_a^b bei wachsendem b allmählich jeden Wert überschreiten muss: in der That gilt dasselbe von dem Ausdrucke $\frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$. Ist dagegen der Exponent m negativ, gleich $= -\mu$, so nimmt y für beliebig zunehmende x beliebig ab, d. h. die Kurve $y = x^m$ nähert sich der positiven Abscissenachse immer mehr, ohne sie je zu erreichen; man sagt in einem solchen Falle: „die Kurve besitzt die Abscissenachse zur Asymptote". Lässt man jetzt wiederum die Endabscisse b beliebig wachsen, so dehnt sich zwar die Fläche J_a^b der Länge nach immer mehr aus, schrumpft aber gleichzeitig der Höhe nach immer mehr ein, so dass zur Beurteilung des Grenzwertes von J_a^b die geometrische Anschauung versagt.

Die Formel (38) $J_a^b = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{a^{m+1}}$ giebt indessen sofortigen Aufschluss.

Man unterscheide zwei Fälle, je nachdem $\mu = -m$ zwischen 0 und 1 gelegen, oder aber grösser als 1 ist. Im ersten Falle fällt $m+1 = 1-\mu$ positiv aus, im zweiten Falle negativ, $= -(\mu - 1)$.

Im ersten Falle ist $\frac{b^{1-\mu} - a^{1-\mu}}{1-\mu}$ ein Bruch, der bei festgehaltenem a und wachsendem b jeden Wert überschreitet. Im zweiten Falle dagegen ist

$$\frac{a^{-(\mu-1)} - b^{-(\mu-1)}}{\mu - 1} = \frac{a^{\frac{1}{\mu-1}} - b^{\frac{1}{\mu-1}}}{\mu - 1}$$

ein Bruch, der bei festgehaltenem a und beliebig wachsendem b gegen den festen Grenzwert $\frac{1}{(\mu-1)a^{\mu-1}}$ konvergiert. Demnach gilt der Satz:

„Für die Kurve $y = x^{-\mu}$ (μ positiv), die die x-Achse zur Asymptote hat, besitzt der Inhalt J_a^b (38) bei wachsendem b den Grenzwert ∞ resp. $\frac{1}{(\mu-1)a^{\mu-1}}$, je nachdem μ zwischen 0 und 1 gelegen oder aber grösser als 1 ist.“*)

Der Uebergangsfall $\mu = 1$ muss hier noch unentschieden bleiben**) (s. § 12, IV). Wir schliessen diese Untersuchungen über die Quadratur der Kurven $y = x^m$ ab, indem wir noch eine wichtige Verallgemeinerung vornehmen. Es sei jetzt y ein Aggregat von Potenzen von x, etwa von zweien:

$$y = ax^m + \beta x^p, \tag{48}$$

wo α, β feste Koeffizienten, m und p beliebige Exponenten (exkl. -1) sind. Wir wählen wiederum ein Intervall $(a \dots b)$ $(b > 0)$ der positiven Abscissenachse und setzen voraus, dass y für dieses Intervall nicht etwa negative Werte annimmt und nur wächst.***) Bei Zugrundelegung von (48) erweitern

---

*) Entsprechendes gilt, wenn a (bei festgehaltenem $b = x$) gegen Null konvergiert: für $\mu > 1$ ist $J_0^x = \infty$, für $\mu < 1$ dagegen

$$J_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{xy}{m+1},$$

so dass also hier (39) erhalten bleibt, wenn auch die geometrische Auslegung zu modifizieren ist. Man beachte noch, dass für $\mu > 1$ $J_x^\infty = -\frac{xy}{m+1}$ wird.

**) Unter Vorwegnahme des p. 28 (Zeile 3 von unten) aufgeführten Satzes würde sich ergeben, dass hier sowohl $J_0^x = \infty$, wie $J_x^\infty = \infty$ wird.

***) Sollte y im Intervalle $(a \dots b)$ nur abnehmen, so würden sich nur die beiden Seiten von (49) vertauschen, was auf (50) keinen Einfluss hat. Sollte aber y abwechselnd zu- und abnehmen, so lässt sich das Intervall $(a \dots b)$ in solche Teilintervalle zerlegen, in denen y entweder nur zu- oder nur abnimmt: die Summierung der einzelnen J führt dann wiederum zur Schlussformel (50). — Entsprechendes gilt für die allgemeinere Gleichung (51), sowie für den weiter unten behandelten Fall, dass y im Intervalle $(a \dots b)$ nicht positiv ist.

sich die Formeln (30) bis (34) zur Berechnung von $J_a^b = J$ unmittelbar dahin, dass an die Stelle der Ungleichung (34) nunmehr die folgende tritt:

$$(49)\quad a(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{1}{\frac{k^{m+1}-1}{k-1}}+\beta(b^{p+1}-a^{p+1})\frac{1}{\frac{k^{p+1}-1}{k-1}}<J$$
$$<a(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{k^m}{\frac{k^{m+1}-1}{k-1}}+\beta(b^{p+1}-a^{p+1})\frac{k^p}{\frac{k^{p+1}-1}{k-1}}.$$

Da $\frac{k^{m+1}-1}{k-1}$ den Grenzwert $m+1$, $\frac{k^{p+1}-1}{k-1}$ den Grenzwert $p+1$, k^m und k^p mit k den Grenzwert 1 besitzen, so erweitert sich die Formel (38) zu der folgenden:

$$(50)\quad J_a^b = a\cdot\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}+\beta\cdot\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}.$$

Das Verfahren überträgt sich sofort auf den Fall, wo y das Aggregat mehrerer Potenzen von x ist:

$$(51)\quad y = ax^m+\beta x^p+\gamma x^\nu+\cdots$$

Um das Resultat bequem zu formulieren, führe man zur Abkürzung die Bezeichnung $F(x)$ für den Ausdruck ein:

$$(52)\quad F(x) = \frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{\beta x^{p+1}}{p+1}+\frac{\gamma x^{\nu+1}}{\nu+1}+\cdots$$

und demgemäss die Zeichen $F(b)$, $F(a)$ für die Werte, die $F(x)$ annimmt, wenn man b resp. a für x substituiert.

Dann ergiebt sich für den Inhalt J_a^b die durchsichtige Formel:

$$(I)\quad J_a^b = F(b)-F(a).$$

Sei etwa im besondern:

$$(53)\quad y = ax^2+\beta x+\gamma,$$

d. h. die Gleichung einer (gewöhnlichen) Parabel, deren Achse parallel der Ordinatenachse läuft, so wird der Ausdruck $F(x)$:

$$(54)\quad F(x) = \frac{ax^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x,$$

somit nach (53):

$$(55)\quad J_a^b = \alpha \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} + \beta \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + \gamma \cdot (b - a)$$

$$= (b - a)\left\{\frac{\alpha}{3}(b^2 + b\,a + a^2) + \frac{\beta}{2}(b + a) + \gamma\right\}.$$

Zum Schlusse sollen auch die bisher gemachten beschränkenden Voraussetzungen über das Intervall von a bis $b(> a)$ — dass nämlich a und b positiv sein sollen und die Ordinate y (51) für dieses Intervall nicht negativ werden dürfe — erweitert werden.

Seien zuvörderst a und $b(> a)$ beide negativ, und im Intervalle von a bis b y niemals negativ, so bleiben die Entwickelungen (30) bis (38), (49) bis (52) Wort für Wort gültig und damit auch Formel (1). Man kann speziell (unter Ausschluss des p. 30 Anm. *) erwähnten Ausnahmefalles) b gegen Null konvergieren lassen, und erhält:

$$(56)\qquad J_a^0 = F(0) - F(a).$$

Ist dagegen a negativ und b positiv, y wiederum im Intervalle nicht negativ, so zerlege man das Intervall von a bis b in die beiden Intervalle von a bis 0 und von 0 bis b, dann zeigt die Figur sofort, dass $J_a^b = J_a^0 + J_0^b$ wird, somit:

$$(57)\quad J_a^b = J_a^0 + J_0^b = \{F(0) - F(a)\} + \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a).$$

Nunmehr sei für irgend ein Intervall von a bis b die Ordinate y (51) niemals positiv. Dann tritt in den Entwickelungen (30) bis (38), bei denen nur die absoluten Grössen der Strecken und Flächeninhalte in Betracht kommen, bloss die Aenderungen ein, dass in (30), (31) jede Ordinate ein negatives Vorzeichen erhält, mithin auch die beiden Seiten der Ungleichungen (32), (34), (35) und (49) ihr Vorzeichen wechseln müssen. Demnach erhält man, wenn man das negative Vorzeichen wieder nach der Mitte dieser Ungleichungen, d. i. nach J, wirft, und den Grenzprozess genau wie oben vornimmt:

$$(58)\qquad -J_a^b \doteq F(b) - F(a).$$

Durch Kombinierung der Formeln (I) und (58) lässt sich jetzt der allgemeinste Fall erledigen, dass in einem Intervalle von a bis $b(> a)$ die Ordinate abwechselnd positiv und

negativ sein kann, d. h. dass die Kurve (51) die Abscissenachse innerhalb des Intervalles in einer Reihe von Punkten, etwa a_1, a_2, a_3, . . ., a_m, schneidet.

Dann geht aus der Identität:

$$(59)\quad \{F(a_1)-F(a)\}+\{F(a_2)-F(a_1)\}+\{F(a_3)-F(a_2)\}+\cdots \\ \cdots+F(b)\ -F(a_m)=F(b)\ -F(a)$$

unmittelbar der allgemeine Satz hervor:

> II. „Wenn innerhalb des Intervalles von a bis $b(>a)$ die Kurve (51) die Abscissenachse ein- oder mehreremal schneidet, so stellt $F(b)-F(a)$ die algebraische Summe der abwechselnd oberhalb und unterhalb der Abscissenachse gelegenen Flächenstücke J dar, die oberen positiv, die unteren negativ genommen. Schneidet dagegen die Kurve die Abscissenachse im Intervalle von a bis b nicht, so ist $F(b)-F(a)=+J_a^b$, resp. $=-J_a^b$, je nachdem die fragliche Fläche eine obere oder eine untere ist."

Würde man endlich die Endabscisse b kleiner als die Anfangsabscisse a annehmen, so kehren alle Teilstrecken des Intervalles von a bis b ihr Vorzeichen um, und man erhält ohne weiteres:

$$(60)\qquad J_a^b=F(a)-F(b)\ \ (a>b).$$

§ 4. Anwendungen auf Geometrie. Fortsetzung.

Quadraturen ebener Kurven bei schiefwinkligen und Polar-Koordinaten. Kubaturen von Rotationskörpern.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen lassen sich mit Leichtigkeit auf den Fall übertragen, wo statt des rechtwinkligen ein schiefwinkliges Parallelkoordinatensystem zu Grunde gelegt wird. Es liege also in diesem Sinne eine Kurve vor:

$$(1)\qquad y=ax^m,$$

so grenzen wir wiederum auf der Abscissenachse zwei positive Abscissen a, $b(>a)$ ab, legen durch diese Punkte a, b Par-

allelen zur Ordinatenachse und gelangen so vermöge der Kurve (1) zu einer Fläche J_a^b, deren Inhalt bestimmt werden soll. Indem wir genau wie in § 3 die Strecke $\overline{ab}$ nach dem Prinzip der geometrischen Reihe einteilen, zerlegt sich die Fläche J_a^b in n Teilstreifen; der einzige Unterschied ist der, dass jeder dieser Teilstreifen mit Hilfe von Parallelen zur Abscissenachse von zwei Parallelogrammen, statt Rechtecken, eingeschlossen wird (s. Fig. 5). Nun ist der Inhalt eines Parallelogramms das Produkt der Längen zweier anstossenden Seiten in den Sinus des eingeschlossenen Winkels; da aber dieser Winkel (als korrespondierender) gleich dem

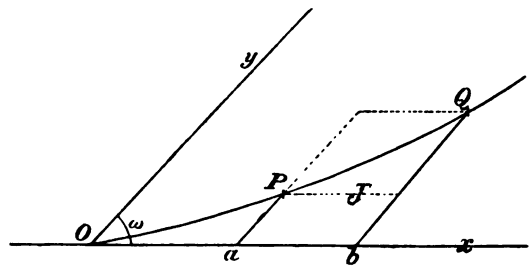


Fig. 5.

Winkel ω ist, den die beiden Koordinatenachsen miteinander bilden, so ist die Ungleichung (32) (§ 3) jetzt nur dahin abzuändern, dass deren beide Seiten noch mit dem festen Faktor $a \sin\omega$ zu versehen sind. Da im übrigen der Grenzprozess, sowie die verschiedenen in § 3 vorgenommenen Erweiterungen genau so verlaufen, wie dort, so haben wir das Ergebnis:

„Die Sätze I und II des § 3 lassen sich ohne weiteres auf den Fall schiefwinkliger Parallel-Koordinaten übertragen, indem man der Differenz $F(b) - F(a)$ den Faktor $\sin\omega$, wo ω der Koordinatenwinkel ist, hinzufügt:

(I) $$J_a^b = \sin\omega \{F(b) - F(a)\}.$$"

Im besondern gilt also für die Kurven (1), bei positivem m (s. p. 30, Anm. *), für $a = 0$ und $b = x$:

(2) $$J_0^x = \frac{\sin\omega \cdot xy}{m+1},$$

d. h. der Inhalt des Parallelogramms mit den Seiten x, y wird durch die Kurve (1) im Verhältnis $1 : m$ geteilt, derart, dass das nach der Abscissenachse zu liegende Stück $\frac{1}{m+1}$ des Parallelogramms ist.

Für $m = 2$ hat man (s. diese Sammlung Bd. 8, § 30) eine gewöhnliche Parabel; die Abscissenachse ist eine beliebige Tangente der Parabel, die Ordinatenachse parallel der Parabelachse.

Nunmehr fassen wir den Fall von Polarkoordinaten ins Auge. Es empfiehlt sich, die Gleichung der zu untersuchenden Kurve in der Gestalt vorzulegen:

$$r^2 = a\varphi^m. \tag{3}$$

Hier bedeutet a eine positive Konstante, r den stets positiv zu nehmenden Radiusvektor, der von einem festen Punkte O, dem „Pole", nach einem beliebigen Punkte P der Kurve (3) hinläuft, während φ der positive Winkel*) ist, den der Radiusvektor mit einer festen Achse, der „Polachse", bildet. Es empfiehlt sich aber, unter dem Winkel φ nicht, wie in der elementaren Mathematik, den nach Graden, Minuten und Sekunden eingeteilten Flächenraum zu verstehen, sondern die Länge des zugehörigen Bogens des um O mit dem Radius 1 geschlagenen Kreises („Einheitskreises"). Dann ist nach der Planimetrie (s. diese Sammlung Bd. 2) der Flächeninhalt eines Kreissektors gleich

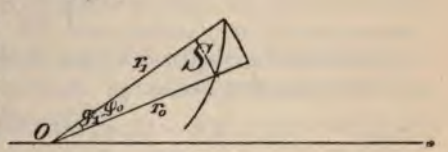


Fig. 6.

$$\frac{\text{Quadrat des Radius} \cdot \text{Centriwinkel}}{2}.$$

*) Genauer, es ist φ der Winkel, um den man sich den Radiusvektor von der Polachse aus in einem bestimmten, als positiv bezeichneten Sinne gedreht denkt, bis er die Lage r erreicht. Ist φ' der kleinste Winkel dieser Art, so kann zu φ' noch eine Anzahl n von vollen Umdrehungen um O hinzutreten, so dass der fragliche Winkel φ von der Grösse $\varphi' + 2n\pi$ $(n \geq 0)$ ist.

Man betrachte jetzt zwei Radienvektoren r_0, r_1 der Kurve (3), die mit der Polachse die Winkel φ_0, $\varphi_1 (> \varphi_0)$, also miteinander den Winkel $\varphi_1 - \varphi_0$ bilden. Diese beiden Vektoren begrenzen mittels der Kurve ein geschlossenes Flächenstück, einen „Sektor", dessen Inhalt mit $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ bezeichnet werde. Der Inhalt $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ soll ermittelt werden.

Man teile den Winkel $\varphi_1 - \varphi_0$, genau wie in § 3 die Strecke $b - a$ von a bis b, nach dem Prinzip der geometrischen Reihe, vermöge der einzuschaltenden Vektoren, die inkl. r_0, r_1 mit der Polachse der Reihe nach die Winkel bilden:

$$(4) \qquad \varphi_0,\ \varphi_0 k,\ \varphi_0 k^2,\ \ldots,\ \varphi_0 k^{n-1},\ \varphi_0 k^n = \varphi_1,$$

so dass k die positive n^{te} Wurzel aus $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ ist:

$$(5) \qquad k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}}.$$

Dadurch zerlegt sich der Winkel $\varphi_1 - \varphi_0$ in n Teilwinkel*) von der Grösse:

$$(6) \quad \varphi_0(k-1),\ \varphi_0 k(k-1),\ \varphi_0 k^2(k-1),\ \ldots,\ \varphi_0 k^{n-1}(k-1).$$

Nehmen wir an, der Exponent m in (3) sei zuvörderst positiv, so nimmt der Radiusvektor r bei wachsendem Winkel φ zu.

Zu den n Teilwinkeln (6) gehören n Teilsektoren, die zusammen wieder den Sektor $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ ausmachen. Dann ist für diese Teilsektoren das Quadrat des jedesmaligen kleineren Vektors gemäss (3) der Reihe nach gleich:

$$(7) \qquad a\varphi_0^m,\ a(\varphi_0 k)^m,\ a(\varphi_0 k^2)^m,\ \ldots,\ a(\varphi_0 k^{n-1})^m,$$

dagegen das Quadrat des jedesmaligen grösseren Vektors der Reihe nach gleich:

$$(8) \qquad a(\varphi_0 k)^m,\ a(\varphi_0 k^2)^m,\ a(\varphi_0 k^3)^m,\ \ldots,\ a(\varphi_0 k^n)^m.$$

Nunmehr schliessen wir jeden Teilsektor von $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ in zwei Grenzen ein, indem wir um O mit den beiden begrenzenden Vektoren je einen Kreis schlagen, und so, eben vermöge der beiden Vektoren, zwei Kreissektoren heraus-

*) Man denke sich n bereits so gross gewählt, dass alle Teilwinkel $< \frac{\pi}{2}$ werden.

schneiden; zugleich wird dadurch $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ selbst in zwei Grenzen eingeschlossen, die Summe der zu kleinen und die Summe der zu grossen Kreissektoren. Nach der obigen, wiederholt anzuwendenden Formel für den Inhalt eines Kreissektors kommt also, als Analogon zu der Ungleichung (32) (§ 3):

$$(9)\ \frac{a}{2}\varphi_0^{m+1}(k-1)\ \{1+k^{m+1}+(k^{m+1})^2+\ldots+(k^{m+1})^{n-1}\}<S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

$$<\frac{a}{2}\varphi_0^{m+1}(k-1)k^m\{1+k^{m+1}+(k^{m+1})^2+\ldots+(k^{m+1})^{n-1}\}.$$

Die beiden Seiten der Ungleichung (9) unterscheiden sich von den respektiven der Ungleichung (32) (§ 3) nur dadurch, dass erstens der feste Faktor $\frac{a}{2}$ hinzutritt, zweitens an Stelle des dortigen Buchstabens a jetzt der Buchstabe φ_0 steht. Da im übrigen der vorzunehmende Grenzprozess, indem man wiederum die Anzahl n unbeschränkt wachsen lässt, genau wie damals verläuft, so entsteht unmittelbar als der gesuchte Grenzwert für $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$:

$$(10)\qquad S_{\varphi_0}^{\varphi_1}=\frac{a}{2}\frac{\varphi_1^{m+1}-\varphi_0^{m+1}}{m+1}.$$

Dieser Ausdruck für $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ bleibt auch derselbe, wenn der Exponent m in (3) negativ ist; denn da alsdann der Vector r bei zunehmendem φ abnimmt, so vertauschen sich nur die beiden Seiten der Ungleichung (9). Auszuschliessen ist wiederum nur der Fall, wo der Nenner in (10), d. i. $m+1$, gegen Null konvergiert (s. § 12 (IV)).

Desgleichen vollziehen sich alle in § 3 vorgenommenen Erweiterungen hier in derselben Weise; liegt also an Stelle von (3) die allgemeinere Kurve zu Grunde:

$$(11)\qquad r^2=a\varphi^m+\beta\varphi^p+\gamma\varphi^q+\ldots,$$

so bilde man sich den Ausdruck $F(\varphi)$:

$$(12)\qquad F(\varphi)=\frac{a}{2}\frac{\varphi^{m+1}}{m+1}+\frac{\beta}{2}\frac{\varphi^{p+1}}{p+1}+\frac{\gamma}{2}\frac{\varphi^{q+1}}{q+1}+\cdots$$

dann ergiebt sich:

$$(\mathrm{II})\qquad S_{\varphi_0}^{\varphi_1}=F(\varphi_1)-F(\varphi_0)\ (\varphi_1>\varphi_0).$$

Es tritt hier sogar insofern eine Vereinfachung gegenüber § 3 ein, als r^2 niemals negativ werden kann, es stellt also stets (II) den wirklichen Inhalt des zum Winkel $\varphi_1 - \varphi_0$ gehörigen Sektors $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ dar; dagegen kann es sehr wohl eintreten — und das ist der Fall, sobald der Winkel $\varphi_1 - \varphi_0$ die Grösse eines Vollwinkels (d. i. 2π) übersteigt —, dass sich das Flächenstück $S_{\varphi_0}^{\varphi_1}$ ein- oder mehreremal, teilweise oder auch ganz überdeckt. Es gilt also der Satz:

„Der Flächensektor der Kurve (11), der überstrichen wird, während sich der Vektor r aus der Lage φ_0 in die Lage $\varphi_1 (> \varphi_0)$ bewegt, hat den Inhalt (II).

Ist im besondern (11) von der Gestalt:

$$r = a\varphi^\mu \ (a > 0), \quad \text{also} \quad r^2 = a^2\varphi^{2\mu}, \tag{13}$$

so hat man offenbar für $F(\varphi)$ (12) zu setzen:

$$F(\varphi) = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^{2\mu+1}}{2\mu+1}, \tag{14}$$

wo der Fall $2\mu + 1 = 0$, d. i. $\mu = -\frac{1}{2}$ auszuschliessen ist (s. § 12 (IV)).

Die beiden bekanntesten Fälle von (13) sind $\mu = 1$, d. i. die „Archimedische Spirale“ (s. diese Sammlung Bd. 8, Abschn. XV) und $\mu = -1$, d. i. die „hyperbolische Spirale“. Hier kommt sofort nach (II):

$$S_{\varphi_0}^{\varphi_1} = \frac{a^2}{2}(\varphi_1^2 - \varphi_0^2) \ (\mu = 1) \tag{15}$$

$$S_{\varphi_0}^{\varphi_1} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{1}{\varphi_1}\right) \ (\mu = -1). \tag{16}$$

Zum Schlusse möge noch gezeigt werden, wie sich das oben zur Quadratur der Kurven (11) befolgte Verfahren mit geringfügigen Aenderungen auf die Lösung einer wichtigen stereometrischen Aufgabe übertragen lässt. Es liege, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem, eine ebene Kurve vor, deren Gleichung von der Form ist:

$$y^2 = ax^m + \beta x^p + \gamma x^q + \ldots, \tag{17}$$

d. i.

$$y = \sqrt{ax^m + \beta x^p + \gamma x^q + \ldots},$$

wo die Quadratwurzel reell und positiv sei. Durch vollständige Drehung der Kurve um die Abscissenachse entsteht eine „Rotationsfläche".

Man wähle wiederum ein Intervall von a bis b auf der Abscissenachse, innerhalb dessen die Kurve (17) etwa nur zunehme. Durch die Punkte a, b lege man je einen „Querschnitt", d. i. eine Ebene senkrecht zur Drehachse, die dann aus der Fläche einen Kreis („Parallelkreis") ausschneidet. Diese beiden Parallelkreise, nebst dem eingeschlossenen Teil („Zone") der Rotationsfläche begrenzen ein Körperstück, dessen Volumen V_a^b berechnet werden soll. Man nennt diese Aufgabe die „Kubatur" der Rotationsfläche.

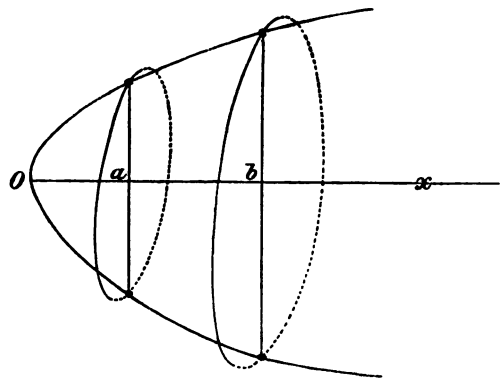


Fig. 7.

Die Strecke von a bis b wird genau, wie in § 3, nach dem Prinzip der geometrischen Reihe in n Teilstrecken zerlegt:

$$a(k-1),\ ak(k-1),\ ak^2(k-1),\ \ldots$$

$$\ldots,\ ak^{n-1}(k-1)\left(k=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right).$$

Durch jeden der eingeschalteten Teilpunkte lege man wiederum einen Querschnitt, so erscheint das ganze Volumen V_a^b als die Summe von n analogen Teilvolumina, deren jedes eine der Teilstrecken zur „Breite" hat, und durch Drehung des auf der Teilstrecke stehenden, in § 3 betrachteten Flächenstreifens um die Abscissenachse entsteht. Ein solches

Teilvolumen lässt sich in zwei Grenzen einschliessen, nämlich in zwei gerade Kreiscylinder, die durch Drehung des in § 3 verwendeten kleineren resp. grösseren Rechtecks um die Abscissenachse entstehen. Bezeichnet man für den Augenblick die Höhe des kleineren Rechtecks mit y_1, die des grösseren mit y_2, die gemeinsame Grundlinie, d. i. die bezügliche Teilstrecke mit d, so sind die Volumina der beiden Kreiscylinder, wie in jeder elementaren Stereometrie bewiesen wird:

$$y_1^2 \pi d \text{ resp. } y_2^2 \pi d.$$

Folglich unterscheidet sich die auf Grund dieser Ausdrücke aufzustellende Rechnung von der oben auf Grund der Formel für den Inhalt eines Kreissektors durchgeführten nur dadurch, dass an die Stelle der dort stehenden Buchstaben r, φ jetzt die Buchstaben y, x treten und an Stelle des dortigen festen Faktors $\frac{1}{2}$ jetzt der feste Faktor π. Somit ist das Resultat:

„Man bilde sich den Ausdruck:

$$F(x) = \pi \left\{ \frac{\alpha x^{m+1}}{m+1} + \frac{\beta x^{p+1}}{p+1} + \frac{\gamma x^{q+1}}{q+1} + \cdots \right\}, \tag{18}$$

dann stellt:

$$V_a^b = F(b) - F(a) \; (b > a) \tag{III}$$

das Volumen des durch die Abscissen a, b bestimmten Körperstücks der durch die Drehung der Kurve (17) um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche dar."

Es möge die allgemeine Formel (III) auf die Kubatur der durch Drehung eines Kegelschnitts um seine Hauptachse entstehenden Rotationsfläche angewandt werden, indem einmal die Mittelpunktsgleichung, das andere mal die Scheitelgleichung eines Kegelschnitts zu Grunde gelegt wird.

Die Mittelpunktgleichung einer Ellipse resp. Hyperbel lautet für die x-Achse als Hauptsache (s. diese Sammlung Bd. 8, Abschn. VIII):

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \begin{pmatrix} + \text{ Ellipse} \\ - \text{ Hyperbel} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

oder

(20) $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$ (Ellipse), $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$ (Hyperbel).

Es sind also die Ausdrücke $F(x)$ (18) hier:

(21) $F(x) = \pi\left\{b^2 x - \frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\right\} = \pi b^2 x\left\{1 - \frac{x^2}{3a^2}\right\}$ (Ellipse),

(22) $F(x) = \pi\left\{\frac{b^2}{a^2}\frac{x^3}{3} - b^2 x\right\} = \pi b^2 x\left\{\frac{x^2}{3a^2} - 1\right\}$ (Hyperbel).

Somit kommt, wenn an Stelle der in (III) gebrauchten Buchstaben a, b, um Verwechslungen zu vermeiden, die Buchstaben α, β gebraucht werden:

(23) $$V_\alpha^\beta = \pm \pi b^2\left\{(\beta - \alpha) - \frac{1}{3a^2}(\beta^3 - \alpha^3)\right\}$$
$$= \pm \pi \frac{b^2}{3a^2}(\beta - \alpha)\left\{3a^2 - (\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2)\right\}$$
$$\left(\begin{matrix}+ \text{ Ellipse} \\ - \text{ Hyperbel}\end{matrix}\right).$$

Man nennt die beiden Rotationsflächen das „verlängerte*) Rotations-Ellipsoid“ resp. das zweischalige**) „Rotationshyperboloid“.

Im besonderen liefert der Fall $\alpha = 0$, $\beta = a$ die Hälfte des Vollellipsoides:

(24) $$V_0^a = \pi \frac{b^2}{3a^2} \cdot a \cdot 2a^2 = \frac{2}{3}\pi b^2 a,$$

d. i.

„Das Volumen des durch Drehung einer Ellipse um ihre grosse Achse hervorgehenden Vollellipsoides ist $\frac{4}{3}\pi$-mal dem Produkt aus der grossen Halbachse a in das Quadrat der kleinen Halbachse b.“

*) Zum Unterschiede von dem „abgeplatteten“ Rotations-Ellipsoide, das entsteht, wenn die Ellipse um die Nebenachse rotiert; die entsprechende Rechnung für das letztere verläuft analog, man hat nur überall a mit b zu vertauschen.

**) Zum Unterschiede von dem „einschaligen“ Rotations-Hyperboloide, das entsteht, wenn die Hyperbel um die Nebenachse rotiert. Auch hier verläuft die Rechnung analog: man hat in (23) a mit b und innerhalb der geschweiften Klammer das negative Vorzeichen mit dem positiven zu vertauschen.

Für $b = a = r$ wird das Ellipsoid zur Kugel mit dem Radius r; in der That ist $\frac{4}{3} r^3 \pi$ nach den Elementen der Stereometrie das Volumen der Kugel.

Oft ist es zweckmässig, in der Formel (23) zur Anfangsabscisse α die des Scheitelpunktes zu wählen, und zwar bei der Ellipse die Abscisse $-a$, bei der Hyperbel die Abscisse $+a$.

Dann erhält man im Falle des Ellipsoides, wenn man für β wiederum x schreibt:

$$
\begin{aligned}
V_{-a}^{x} &= \frac{\pi b^2}{3a^2} (x + a) \{3a^2 - (x^2 - xa + a^2)\} \\
&= \frac{\pi b^2}{3a^2} (2a - x)(a + x)^2 \qquad (25) \\
&= \frac{\pi b^2}{3a^2} (a + x)^2 \{3a - (a + x)\}.
\end{aligned}
$$

Hier bedeutet $a + x$ den Abstand von dem gewählten Scheitelpunkt bis zum Punkte x.

Analog ergiebt sich im Falle des Hyperboloides:

$$
\begin{aligned}
V_{a}^{x} &= -\frac{\pi b^2}{3a^2} (x - a) \{3a^2 - (x^2 + xa + a^2)\} \\
&= \frac{\pi b^2}{3a^2} (x - a)^2 (x + 2a) \qquad (26) \\
&= \frac{\pi b^2}{3a^2} (x - a)^2 \{(x - a) + 3a\}.
\end{aligned}
$$

Hier ist $x - a$ der Abstand vom Scheitelpunkt bis zum Punkte x. Die Formeln (25), (26) fliessen leichter aus der Scheitelgleichung der Kegelschnitte, die auch den Fall der Parabel mit erledigt,

$$y^2 = 2p\xi + q\xi^2. \qquad (27)$$

Um nicht mit dem obigen x zu verwechseln, ist hier die Abscisse mit ξ bezeichnet worden; für $q = 0$ stellt (27) die Parabel, für negatives q, $= -\frac{b^2}{a^2}$ stellt (27) die Ellipse, für positives q, $= +\frac{b^2}{a^2}$ die Hyperbel dar: p ist in beiden Fällen gleich $\frac{b^2}{a}$.

Dann ist gemäss (18) der allen drei Fällen gemeinsame Ausdruck zu bilden:

$$F(\xi) = \pi\left(p\xi^2 + \frac{q}{3}\xi^3\right) = \pi\xi^2\left(p + \frac{q}{3}\xi\right), \tag{28}$$

und man hat nach (III):

$$V_a^\beta = F(\beta) - F(\alpha). \tag{29}$$

Ist im besonderen $\alpha = 0$, d. h. rechnet man vom Scheitelpunkt aus, und setzt man für p und q die angegebenen Werte ein, so gelangt man unmittelbar zu den Formeln (25), (26) zurück.

Wir können uns daher nunmehr auf den Fall $q = 0$ konzentrieren: die durch Drehung einer Parabel um ihre Achse erzeugte Fläche heisst „Rotationsparaboloid".

Somit liefern die Formeln (28), (29):

$$V_a^\beta = \pi \cdot p\,(\beta^2 - \alpha^2) \tag{30}$$

und für $\alpha = 0$, $\beta = \xi$, d. i. für das Volumen des Rotationsparaboloides von der „Höhe" ξ und vom „Grundkreise" mit dem Radius $y = \sqrt{2p\xi}$:

$$V_0^\xi = \pi p \xi^2, \tag{31}$$

oder nach (27):

$$V_0^\xi = \frac{\pi \cdot y^2 \cdot \xi}{2}, \tag{32}$$

d. i.:

> „Das Volumen eines Rotationsparaboloides, das den einen Grundkreis eines geraden Kreiscylinders als Grundkreis besitzt und das Centrum des andern Grundkreises als Scheitel, ist halb so gross, wie das Volumen des Kreiscylinders."

Ein anderer wichtiger, aus der elementaren Stereometrie bekannter Spezialfall von (27) ist $p = 0$, während q einen positiven Wert, $= m^2$ hat, d. h. wenn die Gleichung einer Geraden durch den Anfangspunkt O vorliegt:

$$y = m\xi, \tag{33}$$

die demnach durch Rotation um die Abscissenachse einen geraden *Kreiskegel mit der* Spitze in O erzeugt.

In diesem Falle liefern (28), (29):

$$V_a^\beta = \pi m^2 \frac{\beta^3 - a^3}{3}, \tag{34}$$

also wiederum für $a = 0$, $\beta = \xi$:

$$V_0^\xi = \pi \frac{m^2 \xi^3}{3} = \pi \frac{(m\xi)^2 \cdot \xi}{3} = \frac{\pi y^2 \cdot \xi}{3} \tag{35}$$

$$= \frac{\text{Grundkreis} \cdot \text{Höhe}}{3},$$

wie in den Elementen nachgewiesen wird.

§ 5. Weitere Grenzwerte der Geometrie.

Darstellung des Kreisbogens durch trigonometrische Funktionen. Tangenten der Kegelschnitte.

1. In der elementaren Trigonometrie (s. diese Sammlung Bd. 3, § 13) wird bereits davon Gebrauch gemacht, dass der Sinus eines verschwindenden Winkels selbst verschwindet; man meint damit, dass der Sinus bei beliebig abnehmendem Winkel selbst beliebig abnimmt. Das Verhältnis dieser gegenseitigen Abnahme soll genauer bestimmt werden; als eine merkwürdige Anwendung davon wird der Kreisbogen durch ein unendliches Produkt von trigonometrischen Funktionen dargestellt werden.

Es sei nochmals betont, dass in der Analysis die Grösse eines Winkels nicht durch einen Flächenraum gemessen wird, sondern durch die Länge des zugehörigen Bogens vom Kreise mit dem Radius 1 (also vom Umfange 2π), dessen Centrum die Spitze des Winkels ist. Demnach sprechen wir hinfort nicht mehr von einem rechten Winkel, sondern vom Winkel $\frac{\pi}{2}$, desgleichen nicht mehr von einem gestreckten resp. Vollwinkel, sondern vom Winkel π resp. 2π; anstatt „spitzer“ resp. „stumpfer“ Winkel heisst es: Winkel „im ersten resp. zweiten Quadranten“ u. s. f.

Es sei (s. Fig. 8) δ ein Winkel im ersten Quadranten des Einheitskreises, $s = \sin\delta$, $c = \cos\delta$, $t = \operatorname{tg}\delta = \dfrac{\sin\delta}{\cos\delta}$. Die Figur zeigt, dass die Fläche des Kreissektors vom Centriwinkel δ, der Grösse nach, eingeschlossen ist von zwei rechtwinkligen Dreiecken, von denen das eine die Katheten s, c, das andere die Katheten t, 1 besitzt.

Da nach den Elementen der Planimetrie (s. diese Sammlung Bd. 2) der doppelte Flächeninhalt eines Kreissektors durch das Produkt aus Bogen und Radius angegeben wird, so gilt die Doppel-Ungleichung:

(1) $$cs < \delta < t,$$

oder nach Division mit s:

(2) $$\cos\delta < \frac{\delta}{\sin\delta} < \frac{1}{\cos\delta}.$$

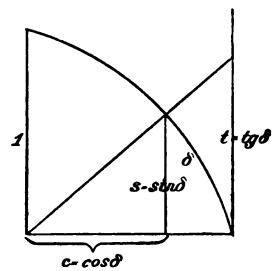


Fig. 8.

Konvergiert der Winkel δ gegen Null, so konvergiert $\cos\delta$ (von unten her) wie auch $\dfrac{1}{\cos\delta}$ (von oben her) gegen Eins, und es gilt somit der für Theorie und Anwendungen*) fundamentale Satz:

I. „Bei beliebiger Abnahme eines Winkels δ nähert sich das Verhältnis $\dfrac{\sin\delta}{\delta}$ mit beliebiger Genauigkeit dem Werte Eins, oder: $\dfrac{\sin\delta}{\delta}$ hat den Grenzwert Eins."

Man bedient sich dabei der Schreibweise:

(I) $$\lim_{\delta=0} \frac{\sin\delta}{\delta} = 1,$$

wo das Zeichen $\lim_{\delta=0}$ (lim ist Abkürzung von limes = Grenze) den in Rede stehenden Grenzprozesses andeutet.

*) Es sei etwa auf die in jedem Lehrbuch der Mechanik behandelte Ableitung der Schwingungsdauer eines „Sekundenpendels" hingewiesen. Weitere Anwendungen findet man in ausführlicheren Lehrbüchern der Trigonometrie.

Praktische Berechnungen*) lehren, dass der Winkel δ durchaus nicht so überaus klein genommen zu werden braucht, um bei den gewöhnlichen Genauigkeitsanforderungen $\frac{\sin\delta}{\delta}$ durch die Einheit ersetzen zu dürfen: für Anwendungen lässt sich daher der Satz (I) so formulieren:

I. „Für kleine Winkel lässt sich der Sinus durch den Winkel selbst ersetzen."

Wir beschränken uns jetzt zuvörderst auf die linke Hälfte der Ungleichung (2), indem wir mit $\sin\delta$ heraufmultiplizieren:

$$\sin\delta\cos\delta < \delta. \tag{3}$$

Nach einer elementaren Formel der Trigonometrie (s. diese Sammlung Bd. 3, § 43) ist für jeden Winkel α:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \text{oder} \quad 2\sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}; \tag{4}$$

es empfiehlt sich daher, in (3) den doppelten Winkel 2δ einzuführen, dann kommt:

$$\sin 2\delta < 2\delta. \tag{5}$$

Führt man hier wiederum den doppelten Winkel 4δ ein, so ergiebt sich nach (4):

$$\frac{\sin 4\delta}{\cos 2\delta} < 4\delta \tag{6}$$

und, wenn man so fortfährt, hat man successive:

$$\frac{\sin 8\delta}{\cos 4\delta\cos 2\delta} < 8\delta, \quad \frac{\sin 16\delta}{\cos 8\delta\cos 4\delta\cos 2\delta} < 16\delta, \ldots \tag{7}$$

und somit allgemein, nach n-maliger Wiederholung des Verfahrens:

$$\frac{\sin 2^n\delta}{\cos 2^{n-1}\delta\cos 2^{n-2}\delta\ldots\cos 4\delta\cos 2\delta} < 2^n\delta. \tag{8}$$

Umgekehrt betrachte man nunmehr $2^n\delta$ als einen beliebig**) gegebenen Winkel x, so wird:

*) Bei Beschränkung auf 4 Dezimalstellen kann man die Grösse von δ, in gewöhnlichem Masse gemessen, bis zu ca. 4 Grad annehmen.

**) Man kann offenbar stets n so gross wählen, dass $\delta < \frac{\pi}{2}$ wird: man hat nur $\frac{x}{2^n} < \frac{\pi}{2}$, d. i. $2^{n-1} > \frac{x}{\pi}$ zu nehmen.

$$2^{n-1}\delta = \frac{2^n\delta}{2} = \frac{x}{2},\quad 2^{n-2}\delta = \frac{2^n\delta}{2^2} = \frac{x}{2^2}\text{ u. s. f.,}$$

und die Ungleichung (8) nimmt die Gestalt an (indem man $n-1$ durch n ersetzt):

$$(9)\qquad \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\dots\cos\frac{x}{2^n}} < x.$$

Ganz in derselben Weise werde die rechte Hälfte der Ungleichung (2) behandelt, dann wird der Reihe nach:

$$(10)\qquad \delta < \frac{\sin\delta}{\cos\delta},$$

$$2\delta < \frac{\sin 2\delta}{\cos\delta\cos\delta},$$

$$4\delta < \frac{\sin 4\delta}{\cos 2\delta\cos\delta\cos\delta},$$

$$8\delta < \frac{\sin 8\delta}{\cos 4\delta\cos 2\delta\cos\delta\cos\delta},$$

$$16\delta < \frac{\sin 16\delta}{\cos 8\delta\cos 4\delta\cos 2\delta\cos\delta\cos\delta},$$

und daher allgemein:

$$(11)\quad 2^n\delta < \frac{\sin 2^n\delta}{\cos 2^{n-1}\delta\cos 2^{n-2}\delta\dots\cos 4\delta\cos 2\delta\cos\delta\cos\delta}.$$

Führt man hier wiederum x statt $2^n\delta$ ein, so schreibt sich (11):

$$(9')\qquad x < \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\dots\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}},$$

und die Kombinierung mit (9) liefert die Doppel-Ungleichung:

$$(\text{II})\qquad \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\dots\cos\frac{x}{2^n}} < x < \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\dots\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}.$$

Es ist leicht zu ersehen, dass hiermit der Winkel x in zwei Grenzen eingeschlossen ist, deren (positive) Differenz D bei beliebig wachsendem n unter jede Grenze sinkt. Denn die Differenz D wird:

$$(12)\quad D = \left\{\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\dots\cos\frac{x}{2^n}}\right\}\left(\frac{1}{\cos\frac{x}{2^n}} - 1\right),$$

also, wenn man, gemäss (II), den ersten Faktor von (12) durch den zu grossen Wert x ersetzt:

$$(12a)\qquad D < x\left(\frac{1}{\cos\frac{x}{2^n}} - 1\right),$$

wo $\cos\frac{x}{2^n}$ bei wachsendem n gegen Eins, mithin $\frac{1}{\cos\frac{x}{2^n}} - 1$ gegen Null konvergiert. Dadurch ist das Ergebnis gewonnen:

„Ein beliebig gegebener Winkel x lässt sich vermöge $\sin x$ und der cosinus der durch fortgesetzte Halbierung aus x hervorgehenden Winkel durch den Grenzwert ausdrücken:

$$(IIa)\qquad x = \lim_{n=\infty} \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\dots\cos\frac{x}{2^n}}$$

oder es ist:

$$(IIb)\qquad \frac{\sin x}{x} = \lim_{n=\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\dots\cos\frac{x}{2^n}\right).“$$

Man bedient sich dabei der Ausdrucksweise, dass das Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$ durch ein „unendliches Produkt“ dargestellt sei; auf die systematische Theorie solcher Produkte werden wir später, in der Theorie der Konvergenz, näher eingehen.

Setzt man im besonderen $x = \frac{\pi}{2}$, also $\sin x = 1$, so ergiebt sich für die Berechnung der Ludolphschen Zahl π *(s. diese Sammlung* Bd. 2) die Formel:

$$\text{(IIc)} \qquad \frac{2}{\pi} = \lim_{n=\infty} \left(\cos\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{8} \dots \cos\frac{\pi}{2^n} \right).$$

Die prinzipielle Bedeutung der Formel (IIa) liegt darin, dass die Länge eines Kreisbogens, d. i. einer begrenzten krummen Linie mit Hilfe von lauter gradlinigen Strecken mit jeder beliebigen Genauigkeit ausgedrückt wird.

Man beachte noch, dass das eingeschlagene Rechnungsverfahren eine einfache geometrische Deutung zulässt. In der That lehrt eine einfache Vervollständigung der Fig. 8 sofort, dass (6) nichts anderes aussagt, als dass die Sehne kleiner ist, als der Kreisbogen; weiter (7), dass die Summe zweier gleicher anstossender Sehnen kleiner ist, als die Summe der beiden gleichen Kreisbögen u. s. f. Umgekehrt ist also der geometrische Sinn der Formel (9), dass man für einen gegebenen Kreisbogen x einen (zu kleinen) Näherungswert erhält, wenn man den Bogen successive halbiert, und jeden Teilbogen durch die zugehörige Sehne ersetzt. In derselben Weise bedeutet die zweite der Ungleichungen (10), dass der Kreisbogen kleiner ist als das von den einschliessenden Radien begrenzte Stück der im Mittelpunkt des Bogens errichteten Tangente; die dritte der Ungleichungen (10), dass der Bogen als die Summe seiner beiden Halbbögen kleiner ist als die Summe der beiden gleichen zugehörigen Tangentenstücke u. s. f. Mit einem Worte, das Verfahren deckt sich gerade mit dem, das man schon bei den Griechen in der elementaren Planimetrie zur Berechnung des Kreisinhalts und der Kreisperipherie eingeschlagen hat, nur dass auf Grund der Ungleichung (12a) erst die Berechtigung dieses Verfahrens gewährleistet wird.

Die Ausdehnung des dem Verfahren zu Grunde liegenden Gedankens, die Länge des Bogens einer beliebig krummen Linie als Grenzwert des Umfanges eines dem Bogen ein- resp. umbeschriebenen Polygons anzusehen, kann erst in der Integralrechnung entwickelt werden.

2. Wir erörtern nunmehr einen andern fundamentalen Grenzbegriff der Geometrie, den einer Tangente einer Kurve, und beginnen wieder mit dem elementaren Falle des Kreises, um ihn dann analog bei den Kegelschnitten zu verfolgen.

2a. Die Tangente in einem Punkte P eines Kreises wird nach der älteren Definition erklärt als die Gerade, die

den Kreis nur in dem einen Punkte P trifft. Achtet man aber auf die Beweise, die für die Sätze über Kreistangenten gegeben werden, so bemerkt man, dass man sich in Wahrheit vielmehr der folgenden Definition bedient:

„Die Tangente in einem Punkte P eines Kreises ist die Gerade, die P mit einem beliebig nahe an P liegenden Kreispunkte verbindet."

Die Tangente erscheint danach als ein geometrisches „Grenzgebilde", analog, wie die irrationalen Zahlgrössen der Arithmetik (s. diese Sammlung Bd. 1, Abschn. VI) als arithmetische Grenzgebilde eingeführt werden.

Dieser geometrische Grenzprozess soll nunmehr durch die analytische Betrachtung ergänzt werden. Wird der Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius a auf ein rechtwinkliges Achsensystem mit dem Ursprung in O bezogen, so lautet seine Gleichung („Mittelpunktsgleichung" s. diese Sammlung Bd. 8, Abschn. IV):

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0. \tag{13}$$

Andererseits ist für die Polarkoordinaten a, φ (l. c. Abschn. II) des Kreispunktes $P(x, y) = P(\varphi)$, wo φ den Winkel von OP mit der positiven x-Achse bedeutet:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi. \tag{14}$$

Man verbinde den Kreispunkt $P = P(\varphi)$ mit dem Kreispunkte $Q(x_1, y_1) = Q(\varphi + \varepsilon)$, wo ε ein positiver oder negativer Winkel sei, um den sich der ursprüngliche Winkel φ geändert hat, damit P in die Lage Q gelangt. Dabei wird als positiver Drehungssinn der im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers genommene gewählt.

Die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 von Q sind nach (14):

$$x_1 = a\cos(\varphi + \varepsilon), \quad y_1 = a\sin(\varphi + \varepsilon). \tag{15}$$

Nun lautet (l. c. § 12) die Gleichung einer Geraden, die die Punkte $P(x, y)$ und $Q(x_1, y_1)$ verbindet, wenn unter ξ, η ihre laufenden Koordinaten verstanden werden:

$$\xi(y_1 - y) - \eta(x_1 - x) + (x_1 y - y_1 x) = 0, \tag{16}$$

also hier mit Einsetzung der Werte (14) (15):

$$(17)\quad \xi a\{\sin(\varphi+\varepsilon)-\sin\varphi\}-\eta a\{\cos(\varphi+\varepsilon)-\cos\varphi\}$$
$$-a^2\{\sin(\varphi+\varepsilon)\cos\varphi-\cos(\varphi+\varepsilon)\sin\varphi\}=0.$$

Würde man hier den Grenzprozess, der die Sekante PQ in die Tangente in P überführen soll, direkt vornehmen, indem man den Winkel ε gegen Null konvergieren lässt, so würden die drei Koeffizienten der Gleichung (17) sämtlich zugleich gegen Null konvergieren.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, nehme man zuvor folgende Umformung vor. Nach den Elementen der Trigonometrie (s. diese Sammlung Bd. 3, §§ 43, 45) gelten für irgend zwei Winkel α, β die Identitäten:

$$(18)\quad \begin{cases} \sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \\ \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta) \\ \qquad\qquad = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}. \end{cases}$$

Für $\alpha=\varphi+\varepsilon$, $\beta=\varphi$ wird $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\varphi+\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\varepsilon}{2}$, mithin geht die Gleichung (17) vermöge Herausziehung des allen drei Koeffizienten gemeinsamen Faktors $2\sin\dfrac{\varepsilon}{2}$ über in:

$$(19)\quad 2\sin\frac{\varepsilon}{2}\left[\xi a\cos\left(\varphi+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\eta a\sin\left(\varphi+\frac{\varepsilon}{2}\right)-a^2\cos\frac{\varepsilon}{2}\right]=0.$$

Das Produkt auf der linken Seite kann nur verschwinden, wenn einer der beiden Faktoren verschwindet. Das Verschwinden von $\sin\dfrac{\varepsilon}{2}$, i. e. von ε würde aber bedeuten, dass der Punkt Q mit dem Punkte P zusammenfällt, somit ihre Verbindungslinie unbestimmt wird. Es muss also der zweite Faktor in (19) verschwinden, und die Gleichung der Geraden PQ lautet, wie nahe auch Q an P heranrücken, d. h. wie klein auch ε sein möge:

$$(20)\quad \xi a\cos\left(\varphi+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\eta a\sin\left(\varphi+\frac{\varepsilon}{2}\right)-a^2\cos\frac{\varepsilon}{2}=0.$$

Nun ist, nach dem Fundamentaltheorem der Trigonometrie (l. c. § 43):

$$\text{(18a)} \qquad \begin{aligned} \cos\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2}\right) &= \cos\varphi \cos\frac{\varepsilon}{2} - \sin\varphi \sin\frac{\varepsilon}{2}, \\ \sin\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2}\right) &= \sin\varphi \cos\frac{\varepsilon}{2} + \cos\varphi \sin\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

damit geht aber die Gleichung (20), nach der Unterdrückung des Faktors $\cos\frac{\varepsilon}{2}$, und mit Rücksicht auf (14) über in:

$$\text{(21)} \qquad (\xi x + \eta y - a^2) - \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}(\xi y - \eta x) = 0.$$

Lässt man hier den Winkel ε einmal positiv, das andere mal negativ gegen Null konvergieren, so konvergiert die Gerade (21) von zwei Seiten her*) gegen die Grenzlage:

$$\text{(IIIa)} \qquad \xi x + \eta y - a^2 = 0,$$

d. i. (IIIa) ist die Gleichung der Tangente des Kreises (13) in $P(x, y)$.

2b. Das eben ausgeführte Rechnungsverfahren bietet den Vorteil, mit kleinen Abänderungen unmittelbar auf die Ellipse übertragen werden zu können. Die „Mittelpunktsgleichung" einer Ellipse mit den Halbachsen a und b lautet (s. diese Sammlung Bd. 8, § 42).

$$\text{(22)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hierbei ist die Hauptachse der Ellipse die x-Achse, ihr Mittelpunkt O der Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Gleichung (22) lässt sich ersetzen durch die beiden andern:

$$\text{(23)} \qquad x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi,$$

*) Man berechnet leicht, dass der Winkel δ der beiden einschliessenden Geraden, die den Werten $\pm\varepsilon$ entsprechen, bestimmt wird durch $\operatorname{tg}\delta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\varepsilon}$, woraus sich entnehmen lässt, wie klein ε zu wählen ist, damit δ unter einen vorgegebenen noch so kleinen Wert sinkt.

wo φ ein Hilfswinkel, die sogenannte „excentrische Anomalie" ist. Man verbinde wiederum den Ellipsenpunkt $P(x, y) = P(\varphi)$ mit dem zweiten Ellipsenpunkt $Q(x_1, y_1) = Q(\varphi + \varepsilon)$. Die Gleichung der Sekante PQ ergiebt sich, wie bei (17):

$$(24)\quad \xi b\{\sin(\varphi+\varepsilon) - \sin\varphi\} - \eta a\{\cos(\varphi+\varepsilon) - \cos\varphi\} - ab\{\sin(\varphi+\varepsilon)\cos\varphi - \cos(\varphi+\varepsilon)\sin\varphi\} = 0.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von (17) nur dadurch, dass die dortigen Faktoren a, a, a^2 hier resp. ersetzt sind durch b, a, ab.

Da im übrigen die weitere trigonometrische Entwicklung genau so verläuft, wie dort, so lässt sich die Gleichung der Sekante PQ mit Hilfe von (23) auch so schreiben:

$$(25)\quad \left(\xi x\frac{b}{a} + \eta y\frac{a}{b} - ab\right) - \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}(\xi y - \eta x) = 0,$$

und diese geht für $\lim \varepsilon = 0$ über in die Gleichung der Ellipsentangente im Punkte $P(x, y)$:

$$(\text{IIIb})\quad \xi x\frac{b}{a} + \eta y\frac{a}{b} - ab = 0, \text{ oder auch } \frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} - 1 = 0.$$

Für $a = b$ wird die Ellipse (22) zum Kreise (13) und entsprechend (IIIb) zu (IIIa).

2c. Mit denselben Hilfsmitteln lässt sich auch die Hyperbeltangente ermitteln. Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist (l. c. § 46):

$$(26)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wo wieder die Hauptachse die x-Achse, der Mittelpunkt O der Anfangspunkt ist.

Die Gleichung (26) lässt sich vermöge der elementaren Identität der Trigonometrie (s. diese Sammlung Bd. 3, § 8):

$$(27)\quad \sec^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

ersetzen durch die beiden andern:

$$(28)\quad x = \frac{a}{\cos\varphi},\quad y = b\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

wo φ *wiederum ein veränderlicher* Hilfswinkel ist.

Die Gleichung der Sekante, die die Hyperbelpunkt $P(x, y) = P(\varphi)$ und $Q(x_1, y_1) = Q(\varphi + \varepsilon)$ verbindet, wird:

$$(29)\quad \xi b\left\{\frac{\sin(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\varphi+\varepsilon)} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right\} - \eta a\left\{\frac{1}{\cos(\varphi+\varepsilon)} - \frac{1}{\cos\varphi}\right\}$$
$$- ab\left\{\frac{\sin(\varphi+\varepsilon)}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{1}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\right\} = 0,$$

oder wegen (18a):

$$(30)\quad \frac{1}{\cos\varphi\cos(\varphi+\varepsilon)}[\xi b\sin\varepsilon + \eta a\{\cos(\varphi+\varepsilon) - \cos\varphi\}$$
$$- ab\{\sin(\varphi+\varepsilon) - \sin\varphi\}] = 0$$

oder wegen (18):

$$(31)\quad \frac{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\varphi\cos(\varphi+\varepsilon)}\left\{\xi b\cos\frac{\varepsilon}{2} - \eta a\sin\left(\varphi+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right.$$
$$\left. - ab\cos\left(\varphi+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = 0,$$

oder gemäss (28):

$$(32)\quad \frac{\sin\varepsilon}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\left[\left(\xi x\frac{b}{a} - \eta y\frac{a}{b} - ab\right) - a\,\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2}(\eta - y)\right] = 0$$

Da das Verschwinden des ersten Faktors wiederum auszuschliessen ist (denn nach (28) kann für keinen im Endlichen gelegenen Hyperbelpunkt $\cos(\varphi+\varepsilon) = 0$ sein), so ergiebt der Grenzübergang, nach (28), als Gleichung der Tangente im Hyperbelpunkte $P(x, y)$:

$$(\mathrm{III\,c})\qquad \frac{\xi x b}{a} - \frac{\eta y a}{b} - ab = 0,$$

oder auch

$$\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} - 1 = 0,$$

in Analogie mit der Gleichung der Ellipsentangente (III b).

2d. Schliesslich möge die Definition der Tangente noch am Beispiel der Parabel erhärtet werden. Die Scheitelgleichung der Parabel ist (§ 3, (1)):

$$(33)\qquad y = \frac{x^2}{2p},$$

wenn die Parabelachse zur y-Achse, der Scheitel zum Ursprung genommen wird. Die Gleichung der die Parabelpunkte $P(x)$ und $Q(x_1) = Q(x+h)$ verbindenden Sekante wird:

$$(34)\quad \frac{\xi}{2p}(x_1^2 - x^2) - \eta(x_1 - x) - \frac{1}{2p}(x_1^2 x - x^2 x_1) = 0,$$

oder

$$(35)\qquad (x_1 - x)\left\{\frac{\xi}{2p}(x_1 + x) - \eta - \frac{x_1 x}{2p}\right\} = 0.$$

Das Verschwinden des ersten Faktors $x_1 - x$ von (35) würde wieder bedeuten, dass P mit Q zusammenfällt, also die Sekante PQ unbestimmt würde; somit entsteht aus (35) wegen $x_1 = x + h$ und gemäss (33) als Gleichung der Sekante:

$$(36)\quad \frac{\xi}{2p}(2x + h) - \eta - \frac{x(x+h)}{2p} = \left\{\frac{\xi x}{p} - (\eta + y)\right\} + \frac{h}{2p}(\xi - x) = 0,$$

mithin für $\lim h = 0$, als Gleichung der Tangente im Punkte $P(x, y)$ der Parabel (33):

$$(\text{III d})\qquad \frac{\xi x}{p} - (\eta + y) = 0.$$

Eine ganz ähnliche Entwicklung gilt für die Tangente einer Parabel, wenn letztere auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen wird, deren y-Achse parallel zur Parabelachse läuft. Die Gleichung der Parabel ist alsdann (s. § 3, (53)) von der Form:

$$(37)\qquad 2y = a + 2bx + cx^2,$$

und die Gleichung der Tangente im Punkte $P(x, y)$ der Parabel lautet:

$$(38)\qquad \eta + y = a + b(x + \xi) + cx\xi.$$

Würde man versuchen, nach demselben Muster die Tangentenbestimmung für die „höhere Parabel“:

$$(39)\qquad y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^m$$

vorzunehmen, so würde man auf die Aufgabe stossen, aus der Differenz der beiden Ausdrücke $a + bx + cx^2 + \ldots + px^m$

und $a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots + px_1^m$ den Faktor $x_1 - x$ abzuspalten, und für die Bildung des Restfaktors ein einfaches Gesetz aufzustellen. Diese Aufgabe wird ihre Erledigung in § 7 finden; es wird sich aber zugleich zeigen, dass damit der Ausgangspunkt zu einer viel weiter reichenden analytischen Entwicklung gegeben wird, die die ganze Analysis beherrscht.

Zu den im obigen behandelten geometrischen Grenzprozessen bemerken wir noch, dass die elementare Geometrie eine ganze Reihe ähnlicher aufzuweisen hat; es sei hier nur hingewiesen auf die Bestimmung des Inhaltes eines Rechteckes, des Volumens eines Tetraeders, eines geraden Kreiskegels und einer Kugel, der Oberfläche eines solchen Kegels und einer Kugel u. a. m. Wir kommen in der Integralrechnung im Zusammenhange darauf zurück.

§ 6. Der binomische Satz.

Wie in § 1 gehen wir von einer Potenz a^m aus, wo die (positive) Basis a beliebig, m aber eine natürliche Zahl ist. Eine der wichtigsten Aufgaben der elementaren Potenzlehre ist dann, zwei Potenzen mit demselben Exponenten m, aber verschiedenen Basen x und $x + h$ — wo der Unterschied h beider positiv oder negativ sein kann — mit einander zu vergleichen.

Das nächstliegende*) Mittel zur Vergleichung zweier Grössen besteht in der Bildung und Untersuchung ihrer Differenz, also im vorliegenden Falle von $(x + h)^m - x^m$. Das leistet aber gerade der binomische Satz (s. diese Sammlung, Bd. 5; Bd. 6 § 5), der sich so schreiben lässt:

$$(1) \quad (x + h)^m - x^m = hm_1 x^{m-1} + h^2 m_2 x^{m-2} + h^3 m_3 x^{m-3} + \ldots + h^{m-1} m_{m-1} x + h^m,$$

wo die m_1, m_2, m_3, ... die successiven, zu m gehörigen „Binomialkoeffizienten“ sind, nämlich:

---

*) Manchmal erweist es sich als zweckmässiger, zur Vergleichung zweier Grössen a, b ihren Quotienten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Differenz ihrer Logarithmen zu untersuchen; allgemeiner wird man die Differenz irgend zweier Funktionswerte (§§ 10, 19) $f(b) - f(a)$ heranziehen.

$$(2)\quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{m}{1}, \quad m_2 = \dfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}, \\ m_3 = \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \cdots \\ m_i{}^{*}) = m_{m-i} = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1\cdot 2\ldots i} \\ \qquad\qquad = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{i!}; \end{cases}$$

das Produkt der ersten i natürlichen Zahlen wird, wie üblich, „i-Fakultät" genannt und durch das Zeichen $i!$ oder auch $\Pi(i)$ angegeben.

Man denke sich die beiden Zahlgrössen x und h nicht ein für allemal fest gegeben, sondern, bei festgehaltenem m, der Reihe nach anderer und anderer Werte fähig, stets wird (1) lehren, wie man die irgend zwei Werten von x und h entsprechende Differenz $(x+h)^m - x^m$ ebensowohl praktisch berechnen, wie theoretisch hinsichtlich ihres Verhaltens verfolgen kann. In diesem Sinne werde der Satz zu Grunde gelegt:

I. „Der binomische Satz (1) dient dazu, zwei Potenzen mit demselben (natürlichen) Exponenten, aber mit verschiedenen Basen, mit einander zu vergleichen."

Da das Gesetz (2) der Binomialkoeffizienten für spätere Anwendungen nicht zweckmässig erscheint, soll der Formel (1) eine brauchbarere und verallgemeinerungsfähigere Gestalt gegeben werden.

Indem man den im i^{ten} Gliede rechterhand stehenden Nenner $i!$ zum Zähler h^i zieht, wird (1) zu:

$$(1a)\quad (x+h)^m - x^m = hmx^{m-1} + \frac{h^2}{2!}m(m-1)x^{m-2} + \ldots + \frac{h^i}{i!}m(m-1)\ldots(m-i+1)x^{m-i} + \ldots + \frac{h^m}{m!}m(m-1)\ldots 2\cdot 1 x^{0}{}^{**}),$$

*) Die ältere Schreibweise „$\binom{m}{i}$" ist hier durch die bequemere m_i ersetzt worden.

**) Hier ist x^0 das im Sinne von § 1, Formel (12) zu verstehende Bequemlichkeitszeichen für 1.

oder:

$$\text{(II)}\quad (x+h)^m - x^m = hP_1 + \frac{h^2}{2!}P_2 + \ldots + \frac{h^i}{i!}P_i + \ldots + \frac{h^m}{m!}P_m,$$

wo mit P_i der „Koeffizient", d. i. der Faktor, von $\frac{h^i}{i!}$ bezeichnet ist.

Welches ist das Bildungsgesetz der P_i? Zuvörderst geht $P_1 = mx^{m-1}$ aus der ursprünglichen Potenz x^m dadurch hervor, dass der Exponent m um 1 verringert, und die so entstehende „nächst niedrigere" Potenz x^{m-1} mit dem ursprünglichen Exponenten m multipliziert wird. Aehnlich geht $P_2 = m\{(m-1)x^{m-2}\}$ dadurch aus $P_1 = mx^{m-1}$ hervor, dass man den Zahlenfaktor m beibehält, im übrigen wiederum x^{m-1} durch die nächst niedrigere Potenz x^{m-2} ersetzt und noch mit dem Exponenten $m-1$ multipliziert. Fährt man so fort, so erkennt man unmittelbar auf Grund von (2), dass jedes P_i aus dem vorhergehenden P_{i-1} stets nach der nämlichen Regel entsteht. Um diese Regel kurz zu fassen, führen wir (s. diese Sammlung, Bd. 6, § 6) den Prozess der „Ableitung" ein durch die Definition:

> III. „Ist c ein fest gegebener Faktor, und x^i $(i = 0, 1, 2, 3 \ldots)$ eine Potenz mit natürlichem Exponenten, so werde unter der *Ableitung* des Produktes cx^i das Produkt cix^{i-1} verstanden, das also aus cx^i hervorgeht, indem man x^i durch die nächst niedrigere Potenz x^{i-1} ersetzt und noch den Exponenten i als Zahlfaktor hinzufügt. Im besonderen ist danach die Ableitung von $cx^0 = c$ gleich Null zu setzen."

Schreibt man der Gleichmässigkeit halber noch $P = P_0$ für die der Formel (1) zu Grunde liegende ursprüngliche Potenz $x^m = 1 \cdot x^m$, so drückt sich das Bildungsgesetz der Koeffizienten P_i $(i = 0, 1, \ldots m)$ des binomischen Satzes:

$$\text{(II)}\quad (x+h)^m = P_0 + hP_1 + \frac{h^2}{2!}P_2 + \ldots + \frac{h^i}{i!}P_i + \ldots + \frac{h^m}{m!}P_m$$

dahin aus:

> IV. „Jedes P_i ist die Ableitung des unmittelbar vorangehenden P_{i-1}."

Da somit durch successive Wiederholung („Iteration") des einen Prozesses (III) der Ableitung der Reihe nach

aus $P = P_0 = x^m$ die Koeffizienten $P_1, P_2, \ldots, P_m$ in (II) entspringen, so bedient man sich auch der Ausdrucksweise:

V. „P_1 ist die „*erste*" Ableitung von $P = P_0$, P_2 die „*zweite*" Ableitung von P, ...; P_i die „i^{te}" und schlieslich P_m die „m^{te}" Ableitung von P."

Dadurch hat zugleich der Index i in P_i eine tiefere Bedeutung erhalten. Der binomische Satz (II) wird somit von dem Gesetz beherrscht:

VI. „Die Koeffizienten $P_1, P_2, \ldots, P_m$ in (II) sind die successiven Ableitungen der ursprünglichen Potenz $x^m = P$."

Man kann aber dem Inhalt des binomischen Satzes noch eine wesentlich andere — und für die Anwendungen ebenso wichtige — Fassung geben, die erkennen lässt, dass der Satz mit der Formel für die Summe einer endlichen geometrischen Reihe (§ 2, (I)) äquivalent ist. Schreibt man nämlich in (1) y für $x + h$, also $y - x$ für h, und dividiert beide Seiten von (1) mit $y - x$, so ergiebt sich:

$$(1b)\quad \frac{y^m - x^m}{y - x} = m_1 x^{m-1} + (y-x) m_2 x^{m-2} + (y-x)^2 m_3 x^{m-3} + \ldots$$
$$\ldots + (y-x)^{m-2} m_1 x + (y-x)^{m-1}.$$

Denkt man sich rechts wiederum die Potenzen von $y - x$ nach dem binomischen Satze entwickelt und sodann die ganze rechte Seite nach Potenzen von x resp. y geordnet, so erhält man ein Aggregat von Gliedern, in denen die Exponenten von x resp. y bis zur Zahl $m - 1$ ansteigen. Das Gesetz dieses Aggregats fliesst aber unmittelbar aus § 2 (I). Denn man hat:

$$(3)\quad \frac{y^m - x^m}{y - x} = \frac{x^m \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^m - 1 \right\}}{x\left(\frac{y}{x} - 1\right)} = x^{m-1} \frac{\left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^m - 1 \right\}}{\frac{y}{x} - 1}$$
$$= x^{m-1} \left\{ \frac{y^{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{y^{m-2}}{x^{m-2}} + \frac{y^{m-3}}{x^{m-3}} + \ldots + \frac{y}{x} + 1 \right\}$$
$$= y^{m-1} + y^{m-2} x + y^{m-3} x^2 + \ldots + y x^{m-2} + x^{m-1}.$$

Es gilt also das Ergebnis:

„Der binomische Satz lässt sich auch in der Gestalt schreiben:

(IIa) $$y^m - x^m = (y-x)\{y^{m-1} + y^{m-2}x + y^{m-3}x^2 + \ldots + yx^{m-2} + x^{m-1}\}.$$"

Es ist nützlich, das Charakteristische dieser Identität noch deutlicher hervorzuheben.

Man nennt in der Algebra (s. diese Sammlung Bd. 6, § 2) einen Ausdruck $f(x)$ von der Form:

(4) $$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^n,$$

wo die Koeffizienten $a, b, c, d, \ldots p$ von x frei sind, einen „ganzen Ausdruck in x", und zwar vom Grade n. Zerfällt ein ganzer Ausdruck $f(x)$ derart in ein Produkt von zwei ganzen Ausdrücken $f_1(x)$, $f_2(x)$, dass nach Ausmultiplikation von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ und Anordnung nach Potenzen von x die Koeffizienten gleich hoher Potenzen in $f_1(x) \cdot f_2(x)$ und $f(x)$ jeweils gleich sind, so sagt man (l. c. § 56), $f(x)$ sei durch $f_1(x)$ teilbar, und nennt $f_2(x) = \dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ den Quotienten von $f(x)$ durch $f_1(x)$. Dann sagt also die Identität (3) oder (IIa) aus, dass die Differenz $y^m - x^m$ zweier Potenzen mit demselben natürlichen Exponenten m durch die Differenz $y - x$ der Basen teilbar ist, sowohl als ganzer Ausdruck in x, wie als ganzer Ausdruck in y betrachtet. In der That lässt sich, ganz wie bei § 2 (I), die rechte Seite von (3) aus der linken auch durch das elementare Verfahren der algebraischen Division (s. diese Sammlung, Bd. 6 § 56) ableiten.

Aber auch das Gesetz des Quotienten von $y^m - x^m$ durch $y - x$, d. i. die rechte Seite von (3), ist ein höchst einfaches. Es ist ein ganzer Ausdruck sowohl in x wie in y, zugleich von der besonderen Art, dass die Summe der Exponenten von x und y in jedem Gliede gleich $m-1$ ist, und zwar kommen hierbei sämtliche Zerlegungen von $m-1$ in zwei natürliche Zahlen: $(m-1)+0$, $(m-2)+1$, $(m-3)+2$, ..., $1+(m-2)$, $0+(m-1)$ wirklich vor.

Ein ganzer Ausdruck von x und y heisst homogen, wenn die Summe der Exponenten von x und y in jedem Gliede eine und dieselbe natürliche Zahl, gleich k ist, und zwar von der Ordnung k.

Damit drückt sich der Satz (IIa) in Worten so aus:

IIa. „Der Quotient von $y^m - x^m$ durch $y - x$ ist ein ganzer homogener Ausdruck $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in x, y, dessen Koeffizienten sämtlich gleich der Einheit sind."

Für die Theorie der Analysis wird sich die Entwickelung (II) als die ungleich fruchtbarere erweisen; in der That wird sich zeigen, dass das ihr zu Grunde liegende Gesetz mit gewissen Modifikationen auch auf andere mathematische Ausdrücke übertragbar ist.

§ 7. Ganze Ausdrücke und Funktionen.

Tangente einer höheren Parabel. Teilbarkeitseigenschaft einer ganzen Funktion von x; mehrfache Wurzeln derselben. Entwickelung einer ganzen Funktion von zwei Variabeln. Partielle Ableitungen. Eulers Identitäten für ganze homogene Funktionen.

Die binomische Entwickelung in der Gestalt (II) (§ 6) lässt sich unschwer ausdehnen auf ganze Ausdrücke (s. § 6, (4)):

(1) $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m,$

wo die Koeffizienten a die Grösse x nicht mehr enthalten.*) Die neue Bezeichnung a_i lässt sofort erkennen, dass a_i der Koeffizient von x^i ist: das Zeichen G soll daran erinnern, dass der Ausdruck ein ganzer ist, und das in Klammer beigesetzte Zeichen (x) soll aussagen, dass eben x die Basis der in (1) auftretenden Potenzen ist; bildet man also den Ausdruck (1) für eine neue Basis $y = x + h$, so hat man ihn mit $G(y) = G(x + h)$ zu bezeichnen. Um wiederum zwei Ausdrücke $G(x)$ und $G(x + h)$ mit einander zu vergleichen, ziehe man die Formel (1a) von § 6 der Reihe nach für $m = 0, 1, 2, \ldots, m$ heran, nachdem man noch beide Seiten resp. mit $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ multipliziert hat:

*) Die a sind also entweder feste gegebene Zahlgrössen, oder aber selbst wieder Ausdrücke (z. B. ganze), in denen Grössen $y, z, \ldots$ vorkommen, die gleichfalls fähig sind, andere und andere Werte anzunehmen. Derartige Ausdrücke können auch trigonometrische, logarithmische etc. sein, wie sie in den nächsten Paragraphen behandelt werden.

$$
(2)\begin{cases}
a_0(x+h)^0-a_0x^0=0\\
a_1(x+h)^1-a_1x^1=1a_1h\\
a_2(x+h)^2-a_2x^2=2a_2hx\ +1\cdot 2a_2\frac{h^2}{2!}\\
a_3(x+h)^3-a_3x^3=3a_3hx^2+2\cdot 3a_3\frac{h^2}{2!}x\ +1\cdot 2\cdot 3a_3\frac{h^3}{3!}\\
a_4(x+h)^4-a_4x^4=4a_4hx^3+3\cdot 4a_4\frac{h^2}{2!}x^2+2\cdot 3\cdot 4a_4\frac{h^3}{3!}x+1\cdot 2\cdot 3\cdot\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
a_m(x+h)^m-a_mx^m=ma_mhx^{m-1}+m(m-1)a_m\frac{h^2}{2!}x^{m-2}\\
\qquad +m(m-1)(m-2)a_m\frac{h^3}{3!}x^{m-3}+\cdots\\
\qquad +m(m-1)\cdots 3\cdot 2a_m\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}x\\
\qquad +m(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1a_m\frac{h^m}{m!}x^0.
\end{cases}
$$

Addiert man und ordnet rechts nach aufsteigenden Potenzen von h, so erhält man mit Rücksicht auf (1):

(3) $G(x+h)-G(x)$

$$
\begin{aligned}
&=h\,[1\cdot a_1+2a_2x+\ 3a_3x^2+\ 4a_4x^3+\ 5a_5x^4+\cdots+ma_mx^{m-1}]\\
&+\frac{h^2}{2!}[\ 1\cdot 2a_2\ +2\cdot 3a_3x+\ 3\cdot 4a_4x^2+\ 4\cdot 5a_5x^3+\cdots+m(m-1)a_m\\
&+\frac{h^3}{3!}[\ 1\cdot 2\cdot 3a_3\ +2\cdot 3\cdot 4a_4x\ +3\cdot 4\cdot 5a_5x^2+\cdots\\
&\qquad\qquad +m(m-1)(m-2)a_m\\
&+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+\frac{h^i}{i!}[\ 1\cdot 2\cdot 3\cdots ia_i+2\cdot 3\cdots(i+1)a_{i+1}x\ +\cdots\\
&\qquad\qquad +m(m-1)\cdots(m-i+1)a_m\\
&+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}[\ 1\cdot 2\cdots(m-1)a_{m-1}+2\cdot 3\cdots m\\
&+\frac{h^m}{m!}[\ 1\cdot 2\cdot 3\cdots m
\end{aligned}
$$

oder, mit Einführung der Abkürzungen $G_1(x) = G_1$, $G_2(x) = G_2$, ..., $G_m(x) = G_m$:

$$\text{(I)}\quad G(x+h) - G(x) = hG_1 + \frac{h^2}{2!}G_2 + \frac{h^3}{3!}G_3 + \ldots + \frac{h^i}{i!}G_i + \ldots \frac{h^m}{m!}G_m.$$

Das Bildungsgesetz der G_i lässt sich aus (3) ablesen. Man definiere, als naheliegende Verallgemeinerung der Ableitung von cx^m (§ 6, (III)), die Ableitung eines ganzen Ausdrucks in x, wie folgt (s. diese Sammlung Bd. 6, § 6):

II „Unter der *Ableitung* eines ganzen Ausdrucks i^{ter} Ordnung: $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_ix^i$, wo die b von x frei sind, versteht man den ganzen Ausdruck $(i-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$1 \cdot b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \cdots + ib_ix^{i-1},$$

der somit dadurch aus dem vorgelegten ganzen Ausdruck hervorgeht, dass man in ihm jedes Glied gemäss § 6 (III) durch seine Ableitung ersetzt."

Die Entwickelung (3) lehrt, dass G_1 die Ableitung von $G(x) = G = G_0$ ist, G_2 die Ableitung von G_1 ..., G_i die von G_{i-1}. Damit lautet das Gesetz von (I):

III „In der binomischen Entwickelung (I) von $G(x+h)$ nach aufsteigenden Potenzen von h ist der Koeffizient $G_i(x)$ von $\frac{h^i}{i!}$ die Ableitung des unmittelbar vorhergehenden $G_{i-1}(x)$; unter $G_0(x)$ ist $G(x)$ selbst zu verstehen."

Oder kürzer, wenn man wiederum (s. § 6, V) $G_i(x)$ als „i^{te} Ableitung" von $G(x)$ definiert:

IV „Der Koeffizient $G_i(x)$ von $\frac{h^i}{i!}$ in der Entwickelung (I) von $G(x+h)$ ist die i^{te} Ableitung von $G(x)$."

Es wird nicht überflüssig sein, die Formel (I) für einen einzelnen Fall, etwa $m = 5$, explicite vor sich zu sehen:

$$
\begin{aligned}
&G(x+h) - G(x)\\
&= h\,(1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4)\\
&+\frac{h^2}{2!}(1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3)\\
&+\frac{h^3}{3!}(1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + 3\cdot 4\cdot 5a_5x^2)\\
&+\frac{h^4}{4!}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5x)\\
&+\frac{h^5}{5!}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5).
\end{aligned}
$$

Von der binomischen Entwickelung (I) für ganze Ausdrücke gelangt man zu der des binomischen Satzes für Potenzen (§ 6, (II)) als zu einem sehr speziellen Falle zurück, wenn man $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots a_{m-1} = 0$ und $a_m = 1$ nimmt.

Soll die durch (I) geleistete Vergleichung von $G(x+h)$ mit $G(x)$ ihre Kraft äussern, so wird man, wie schon in § 6 betont, für die Grössen x und h nicht zwei feste Werte, sondern der Reihe nach andere und andere Werte einsetzen („substituieren"); unter diesem Gesichtspunkt nennt man $G(x)$ eine „ganze Funktion der Variabeln x" von der Ordnung m, x ihr „Argument", h einen „Zuwachs" („Inkrement") von x.

Von der binomischen Entwickelung III für ganze Funktionen $G(x)$ soll zunächst die am Ende von § 5 in Aussicht gestellte Anwendung auf die Bestimmung der Tangente einer „Parabel m^{ter} Ordnung":

$$(4) \qquad y = G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$

gemacht werden.

Indem man, wie in § 5, 2 d, einen Punkt $P(x)$ der Parabel (4) mit einem zweiten Parabelpunkte $Q = Q(x+h) = Q(x_1)$ verbindet, erhält man als Gleichung der verbindenden Sekante:

$$(5) \qquad \xi(y_1 - y) - \eta(x_1 - x) = xy_1 - x_1y,$$

oder mit Benutzung von (4):

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad &\xi[G(x_1) - G(x)] - \eta(x_1 - x) = xG(x_1) - x_1y\\
&= x[G(x_1) - G(x)] - y(x_1 - x),
\end{aligned}
$$

oder auf Grund von (I), nach Abspaltung des Faktors $x_1 - x = h$:

(7) $$\xi[G_1(x)+h\{\ \}]-\eta=x[G_1(x)+h\{\ \}]-y,$$

wo der Faktor von h auf der rechten Seite von (I):

$$G_1+\frac{h}{2!}G_2+\frac{h^2}{3!}G_3+\ldots+\frac{h^{i-1}}{i!}G_i+\ldots+\frac{h^{m-1}}{m!}G_m$$

in (7) durch eine geschweifte Klammer angedeutet ist. Geht man jetzt zur Grenze $\lim h=0$ über, so konvergiert das Produkt aus h mit dem in der geschweiften Klammer stehenden Ausdruck gegen Null und es resultiert als Gleichung der Tangente der Parabel m^{ter} Ordnung (4) im Punkte $P(x, y)$:

(8) $$\eta-y=(\xi-x)G_1(x).$$

Eine zweite Anwendung der binomischen Entwickelung (I) für ganze Funktionen $G(x)$ resp. des Begriffes ihrer Ableitungen möge auf die Algebra gemacht werden.

Man nennt die durch Nullsetzen eines ganzen Ausdrucks $G(x)$ hervorgehende Gleichung:

(9) $$G(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m=0$$

eine „Gleichung m^{ter} Ordnung (m^{ten} Grades) in einer Unbekannten x“. Eine solche Gleichung (9) stellt in Wirklichkeit eine von der Algebra erst zu lösende *Aufgabe* dar, nämlich solche Werte $\alpha, \beta, \ldots$ der Unbekannten x zu ermitteln, nach deren Einsetzung für x der Ausdruck G identisch verschwindet. Solche Werte $\alpha, \beta, \ldots$ von x heissen „Wurzeln“ des Ausdrucks $G(x)$ oder der Gleichung $G(x)=0$ (s. diese Sammlung Bd. 6, Abschn. VII, X).

Es lassen sich aber, ohne diese Wurzeln von $G(x)$ zu kennen, fundamentale Sätze über den Zusammenhang zwischen $G(x)$ und den Wurzeln aufstellen, von denen einer hier abgeleitet werden soll.

Es seien zunächst x und a zwei ganz beliebige Werte, so ist nach (I):

(10) $$G(x)-G(a)\equiv(x-a)\Big[G_1(a)+\frac{(x-a)}{2!}G_2(a)+\frac{(x-a)^2}{3!}G_3(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{m-1}}{m!}G_m(a)\Big],$$

wo der Faktor von $x-a$ rechterhand wiederum eine ganze Funktion von x (wie von a), und zwar von der Ordnung

$m-1$ ist. Wie in dem besonderen Falle § 6, p. 60, bedienen wir uns der Ausdrucksweise:

„Die Differenz $G(x)-G(a)$ ist für beliebige Werte von x und a durch die Differenz $x-a$ teilbar."

Aus (10) ergiebt sich dann sofort, dass der Ausdruck $G(x)$ selbst dann und nur dann durch $x-a$ teilbar ist, wenn $G(a)\equiv 0$, d. h. wenn a eine Wurzel von $G(x)$ ist:

„Das Kriterium für die Teilbarkeit eines ganzen Ausdrucks $G(x)$ durch eine Differenz $x-a$ besteht darin, dass a eine Wurzel von $G(x)$ ist."

Man kann daher den Begriff einer Wurzel von $G(x)$ auch dahin definieren, dass $G(x)$ durch $x-a$ teilbar sein soll. Diese Definition lässt sich unmittelbar auf „mehrfache Wurzeln" von $G(x)$ ausdehnen:

„a heisst eine *ν-fache Wurzel* von $G(x)$ dann und nur dann, wenn $G(x)$ durch die ν^{te}, aber keine höhere Potenz von $x-a$ teilbar ist."

Diese Definition einer ν-fachen Wurzel von $G(x)$ lässt sich vermöge (10) in ein zweckmässigeres Kriterium überführen. Es sei a zuvörderst eine Wurzel von $G(x)$, i. e. $G(a)=0$, so ist also:

$$(11)\quad G(x)\equiv(x-a)\Big[G_1(a)+\frac{(x-a)}{2!}G_2(a)+\frac{(x-a)^2}{3!}G_3(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{m-1}}{m!}G_m(a)\Big].$$

Soll nun a eine Doppelwurzel von $G(x)$ sein, d. h. $G(x)$ gerade durch die zweite Potenz von $x-a$, mithin der Faktor von $x-a$ auf der rechten Seite von (11) durch $x-a$ teilbar sein, so ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $G_1(a)=0$ ist:

„Das Kriterium für eine Doppelwurzel (und keine höhere Wurzel) a von $G(x)$ besteht darin, dass $G(x)$ und $G_1(x)$ eine gemeinsame Wurzel a besitzen, die aber nicht auch Wurzel von $G_2(x)$ sein darf."

Fährt man so fort, so gelangt man ohne Weiteres zu dem allgemeinen Satze:

„Das Kriterium dafür, dass a gerade eine ν-fache Wurzel des ganzen Ausdrucks $G(x)$ ist, lässt sich dahin ausdrücken, dass $G(x)$ nebst den ersten $\nu - 1$ Ableitungen eine gemeinsame Wurzel a besitzen, die aber nicht auch Wurzel der ν^{ten} Ableitung von $G(x)$ sein darf."

Als einfachste Beispiele seien die Fälle $m = 2, 3$ angeführt.

Sei erstens (in etwas anderer Schreibweise):

$$G(x) \equiv x^2 + 2bx + c, \quad G_1(x) = 2(x + b). \tag{12}$$

Da $G_1(x)$ nur die eine Wurzel $a = -b$ hat, so muss, falls $G(x)$ eine Doppelwurzel haben soll, $G(-b) = 0$ sein, d. i.

$$b^2 \equiv 2b \cdot b + c \equiv c - b^2 = 0. \tag{13}$$

Das stimmt mit den bekannten elementaren Sätzen über quadratische Gleichungen $G(x) \equiv x^2 + 2bx + c = 0$ überein (s. diese Sammlung, Bd. 1 § 27). Denn da identisch:

$$G(x) \equiv x^2 + 2bx + c \equiv (x + b)^2 + (c - b^2), \tag{14a}$$

so können die zwei Wurzeln von $G(x) = 0$ dann und nur dann zusammenfallen, wenn $c - b^2 = 0$. Das nämliche geht aus dem expliziten Ausdruck der beiden Wurzeln α, β einer quadratischen Gleichung $G(x) = 0$:

$$\begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} = -b \pm \sqrt{b^2 - c} \tag{14b}$$

hervor. Man nennt $b^2 - c$ die „Discriminante" des quadratischen Ausdrucks $G(x)$, oder auch der quadratischen Gleichung $G(x) = 0$.

Sei zweitens, für $m = 3$, $G(x) = 0$ in der sogenannten „reduzierten" Form (auf die man eine Gleichung 3. Ordnung stets bringen kann, s. diese Sammlung, Bd. 6 § 111) vorgelegt:

$$G(x) \equiv x^3 - 3px - 2q = 0. \tag{15}$$

Dann ist:

$$G(x) \equiv x^3 - 3px - 2q, \quad G_1(x) \equiv 3(x^2 - \mathfrak{p}). \tag{16}$$

$G_1(x) = 0$ hat nur die beiden Wurzeln $\alpha, \beta = \pm\sqrt{p}$; soll also für eine der beiden auch $G(x)$ verschwinden, so muss:

$$\pm\sqrt{p}\,(p - 3p) = 2q \tag{17}$$

sein, oder, wenn man quadriert und den Faktor 4 hebt:

$$p^3 - q^2 = 0. \tag{18}$$

Das ist in der That das in der Theorie der Gleichungen 3. Ordnung abgeleitete Kriterium*) für eine Doppelwurzel einer reduzierten Gleichung 3. Ordnung. Man nennt $p^3 - q^2$ deren „Discriminante" (s. diese Sammlung, Bd. 6 § 80).

Es werde auch noch das Kriterium für eine dreifache Wurzel einer Gleichung dritter Ordnung in Betracht gezogen. Letztere sei in der allgemeinen Gestalt vorgelegt, dann ist:

$$\begin{cases} G(x) \equiv x^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0, \\ G_1(x) \equiv 3(x^2 + 2bx + c), \\ G_2(x) \equiv 6(x + b). \end{cases} \tag{19}$$

Soll die Wurzel $-b$ von $G_2(x)$ zugleich eine Wurzel von $G_1(x)$ und $G(x)$ sein, so hat man:

$$c - b^2 = 0, \quad 2b^3 - 3bc + d \equiv 2b(b^2 - c) + (d - bc) = 0. \tag{20}$$

Mithin ist das Kriterium einer dreifachen Wurzel von $G(x)$ ausgedrückt durch das gleichzeitige Bestehen der beiden Relationen:

$$b^2 = c, \quad d = bc, \tag{21}$$

oder auch, mit Einsetzung des Wertes von c aus der ersten Relation in die zweite:

$$b^2 = c, \quad b^3 = d. \tag{21a}$$

---

*) Umgekehrt, wenn die Bedingung (18) erfüllt ist, so hat man entweder $q = +p\sqrt{p}$, oder $q = -p\sqrt{p}$. Im ersten Falle wird:

$$G(x) \equiv x^3 - 3px - 2p\sqrt{p} \equiv (x + \sqrt{p})^2 (x - 2\sqrt{p}),$$

im zweiten:

$$G(x) \equiv x^3 - 3px + 2p\sqrt{p} \equiv (x - \sqrt{p})^2 (x + 2\sqrt{p});$$

d. h. im ersten Falle hat die Gleichung $G(x) = 0$ die Doppelwurzel $-\sqrt{p}$ und die einfache Wurzel $2\sqrt{p}$, im zweiten dagegen hat $G(x) = 0$ die Doppelwurzel $+\sqrt{p}$ und die einfache Wurzel $-2\sqrt{p}$.

In der That geht (19), sobald die Gleichungen (21a) erfüllt sind, über in:

$$G(x) \equiv x^3 + 3bx^2 + 3b^2x + b^3 \equiv (x+b)^3.$$

Wir kehren jetzt zurück zur binomischen Entwickelung (I) und versuchen, sie auf ganze Funktionen $G(x, y)$ von zwei Variabeln auszudehnen (s. diese Sammlung, Bd. 6 § 7). Es sei, nach aufsteigenden Potenzen von x, y angeordnet:

$$\begin{aligned} G(x,y) \equiv a_0 &+ (a_1x + b_1y) + (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) \\ (22) \qquad &+ (a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) + \dots \\ &+ (a_nx^n + b_nx^{n-1}y + c_nx^{n-2}y^2 + \dots + p_nxy^{n-1} + q_ny^n); \end{aligned}$$

n heisst die Ordnung von G. Es mögen die Variabeln x, y je einen (positiven oder negativen) Zuwachs h resp. k erleiden, dann ist die Aufgabe, $G(x+h, y+k)$ nach Potenzen von h, k zu entwickeln, derart, dass die Koeffizienten h und k nicht mehr enthalten.

Indem man $G(x, y+k)$ zuvörderst als ganze Funktion von x allein auffasst [deren Koeffizienten zwar selbst ganze Funktionen von $y+k$ sind, aber x nicht mehr enthalten] und demgemäss auf Grund von (I) nach ansteigenden Potenzen von h entwickelt, kommt:

$$\begin{aligned} (23) \quad G(x+h, y+k) = G(x, y+k) &+ h\, G_1(x, y+k) \\ &+ \frac{h^2}{2!} G_2(x, y+k) + \dots \\ &+ \frac{h^i}{i!} G_i(x, y+k) + \dots \\ &+ \frac{h^n}{n!} G_n(x, y+k). \end{aligned}$$

Nunmehr werden die Ausdrücke:

$$G(x, y+k),\ G_1(x, y+k),\ G_2(x, y+k),\ \dots,\ G_n(x, y+k)$$

als ganze Funktionen von y allein aufgefasst, und somit, gemäss (I) — unter Berücksichtigung der abweichenden Bezeichnungen — nach ansteigenden Potenzen von k entwickelt. Damit ergiebt sich aber *die Notwendigkeit*, den Prozess der Ableitung *von G sowohl in* Bezug auf x, wie in Bezug auf

y in Betracht zu ziehen und für die so entstehenden Bildungen geeignete Zeichen einzuführen. Es sei Cx^iy^k irgend ein Glied von $G(x, y)$. Die r^{te} Ableitung von Cx^iy^k in Bezug auf x ist nach § 6, III—V:

$$Ci(i-1)(i-2)\dots(i-r+1)x^{i-r}y^k$$

(also für $r > i$ gleich Null) und die Summe aller dieser Glied-Ableitungen ist die r^{te} Ableitung von $G(x, y)$ selbst in Bezug auf x. Führt man darauf den Ableitungsprozess s-mal in bezug auf y aus, so liefert das ursprüngliche Glied Cx^iy^k den Beitrag:

$$(24)\quad Ci(i-1)(i-2)\dots(i-r+1)k(k-1)(k-2)\dots(k-s+1)x^{i-r}y^{k-s}.$$

„Die Summe aller so entstehenden Glieder (24) wird definiert als die $(r+s)^{\text{te}}$ [*partielle*], r-mal nach x, s-mal nach y genommene Ableitung von $G(x, y)$."

Ein Blick auf (24) lehrt aber sofort, dass es ganz gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die einzelnen $r+s$ Ableitungsprozesse vorgenommen werden, wenn nur im ganzen r-mal nach x, s-mal nach y abgeleitet wird. Da der Beweis für ganze Funktionen von mehr als 2 Variabeln offenbar ganz analog ist, so können wir den allgemeinen Satz aussprechen:

„Bei partiellen Ableitungen von ganzen Funktionen mehrerer Variabeln ist es für das Ergebnis gleichgültig, in welcher Reihenfolge die einzelnen Ableitungsprozesse vorgenommen werden."

Es empfiehlt sich, das Resultat der r-maligen Ableitung von $G(x, y)$ nach x und der darauf folgenden s-maligen Ableitung nach y mit $G_{r,s}(x, y) = G_{r,s}$ zu bezeichnen; somit ist auch das frühere Zeichen G_r für die r^{te} Ableitung von G nach x allein jetzt durch $G_{r,0}$ zu ersetzen, und entsprechend ist $G_{0,s}$ die s^{te} Ableitung von G nach y allein. Da nach obigem $G_{r,s}$ aufgefasst werden kann als die s^{te} Ableitung von $G_{r,0}$ nach y, so erhält man der Reihe nach für die Koeffizienten von h^0, $\frac{h}{1}$, $\frac{h^2}{2!}$, $\frac{h^3}{3!}$, $\dots$ $\frac{h^n}{n!}$ gemäss (I):

$$1\,|\,G(x,y+k)=G_{0,0}+kG_{0,1}+\frac{k^2}{2!}G_{0,2}+\frac{k^3}{3!}G_{0,3}+\frac{k^4}{4!}G_{0,4}+\ldots+\frac{k^n}{n!}G_{0,n}$$

$$h\,|\,G_1(x,y+k)= \quad G_{1,0}+kG_{1,1}+\frac{k^2}{2!}G_{1,2}+\frac{k^3}{3!}G_{1,3}+\ldots+\frac{k^{n-1}}{(n-1)!}G_{1,n-1}$$

$$\frac{k^2}{2!}\,|\,G_2(x,y+k)= \quad G_{2,0}+kG_{2,1}+\frac{k^2}{2!}G_{2,2}+\ldots+\frac{k^{n-2}}{(n-2)!}G_{2,n-2}$$

$$\frac{k^3}{3!}\,|\,G_3(x,y+k)= \quad G_{3,0}+kG_{3,1}+\ldots+\frac{k^{n-3}}{(n-3)!}G_{3,n-3}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{k^n}{n!}\,|\,G_n(x,y+k)= \quad G_{n,0}.$$

Multipliziert man diese Identitäten successive gemäss (23) auf beiden Seiten mit 1, h, $\frac{h^2}{2!}$, $\frac{h^3}{3!}$ …, $\frac{h^n}{n!}$ (wie es in (25) links angedeutet ist), und addiert, so kommt nach geeigneter Zusammenfassung für die gewünschte Entwickelung von $G(x+h,\ y+k)$ nach „aufsteigenden“ Potenzen von h und k:

$$\begin{aligned}(\mathrm{III})\quad & G(x+h,y+k)\\ =\ & G_{0,0}+(hG_{1,0}+kG_{0,1})\\ & +\frac{1}{2!}(h^2G_{2,0}+2hkG_{1,1}+k^2G_{0,2})\\ & +\frac{1}{3!}(h^3G_{3,0}+3h^2kG_{2,1}+3hk^2G_{1,2}+k^3G_{0,3})\\ & +\frac{1}{4!}(h^4G_{4,0}+4h^3kG_{3,1}+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}h^2k^2G_{2,2}+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}hk^3G_{1,3}+k^4G_{0,4})\\ & +\ \vdots\\ & +\frac{1}{i!}(h^iG_{i,0}+i_1h^{i-1}kG_{i-1,1}+i_2h^{i-2}k^2G_{i-2,2}+i_3h^{i-3}k^3G_{i-3,3}+\ldots\\ & \qquad\qquad +k^iG_{0,i})\\ & +\ \vdots\\ & +\frac{1}{n!}(h^nG_{n,0}+n_1h^{n-1}k\ G_{n-1,1}+n_2h^{n-2}k^2G_{n-2,2}+n_3h^{n-3}k^3G_{n-3,3}\\ & \qquad\qquad +\ldots+k^nG_{0,n}).\end{aligned}$$

Kürzer lässt sich das in (II) explicite entwickelte Gesetz dahin ausdrücken:

„Ist $G(x, y)$ eine ganze Funktion n^{ter} Ordnung von x und y, und fasst man $G(x+h, y+k)$ als ganze Funktion n^{ter} Ordnung von h und k auf, so ist der Koeffizient von $h^r k^s$ gleich $\frac{1}{(r+s)!}(r+s)_r G_{r,s} = \frac{1}{(r+s)!}(r+s)_s G_{r,s}$, wo $(r+s)_r = (r+s)_s$ den r^{ten}, zu $r+s$ gehörigen Binomialkoeffizienten bedeutet."

Eine analoge Entwickelung findet im Falle von mehr als 2 Variabeln statt; wir kommen später darauf von allgemeinerem Gesichtspunkt aus zurück. Wir schliessen diese formalen Erörterungen über ganze Funktionen ab, indem wir noch einige wichtige, von Euler stammende Identitäten zwischen einer ganzen homogenen Funktion und ihren partiellen Ableitungen herleiten.

Die ganze Funktion $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heisst homogen, und zwar von der Dimension m, wenn in jedem Gliede $Cx_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_n^{i_n}$ von G die Summe der Exponenten $i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n$ gleich m ist. Die ersten partiellen Ableitungen von G resp. nach $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ mögen jetzt lieber mit $G'_{x_1}, G'_{x_2}, G'_{x_3} \ldots, G'_{x_n}$ bezeichnet sein. Diese Ableitungen sind für das bezeichnete Glied der Reihe nach folgende:

$$(26)\quad \begin{cases} i_1 C x_1^{i_1-1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_n^{i_n},\ i_2 C x_1^{i_1}x_2^{i_2-1}x_3^{i_3}\ldots x_n^{i_n}, \\ i_3 C x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3-1}\ldots x_n^{i_n}, \ldots, i_n C x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_n^{i_n-1}. \end{cases}$$

Multipliziert man sie resp. mit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ und addiert, so ergiebt sich:

$$(27)\quad (i_1+i_2+i_3+\ldots+i_n)\, C x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_n^{i_n} = m\, C x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\ldots x_n^{i_n}.$$

Verfährt man so mit jedem einzelnen Gliede von G und bildet wiederum die Summe, so erhält man den „Eulerschen Satz für ganze homogene Funktionen":

$$(III)\quad x_1 G'_{x_1} + x_2 G'_{x_2} + x_3 G'_{x_3} + \ldots + x_n G'_{x_n} \equiv m G,$$

d. h.:

„Multipliziert man jede der ersten partiellen Ableitungen einer ganzen homogenen Funktion mehrerer Variabeln von der Di-

mension m jeweils mit der Variabeln, nach der die Ableitung genommen ist, so ist die Summe dieser Produkte identisch gleich der mit der Dimension m multiplizierten Funktion."

Der Satz lässt sich sofort auf höhere partielle Ableitungen von G ausdehnen. Man bezeichne die zweite Ableitung von G nach x_i und x_k mit $G^{(2)}_{x_i,x_k} = G^{(2)}_{x_k,x_i}$. Wendet man die Formel (III) auf jede der ganzen homogenen Funktionen G'_{x_i} von der Dimension $m-1$ an, so entsteht:

$$(28)\quad \begin{cases} x_1 G^{(2)}_{x_1,x_1} + x_2 G^{(2)}_{x_1,x_2} + x_3 G^{(2)}_{x_1,x_3} + \ldots + x_n G^{(2)}_{x_1,x_n} \equiv (m-1)\, G'_{x_1}, \\ x_1 G^{(2)}_{x_2,x_1} + x_2 G^{(2)}_{x_2,x_2} + x_3 G^{(2)}_{x_2,x_3} + \ldots + x_n G^{(2)}_{x_2,x_n} \equiv (m-1)\, G'_{x_2}, \\ x_1 G^{(2)}_{x_3,x_1} + x_2 G^{(2)}_{x_3,x_2} + x_3 G^{(2)}_{x_3,x_3} + \ldots + x_n G^{(2)}_{x_3,x_n} \equiv (m-1)\, G'_{x_3}, \\ \quad\vdots \\ x_1 G^{(2)}_{x_n,x_1} + x_2 G^{(2)}_{x_n,x_2} + x_3 G^{(2)}_{x_n,x_3} + \ldots + x_n G^{(2)}_{x_n,x_n} \equiv (m-1)\, G'_{x_n}. \end{cases}$$

Multipliziert man diese Identitäten resp. mit $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$, und addiert, so kommt auf Grund von (III):

$$\begin{aligned} x_1^2 G^{(2)}_{x_1,x_1} + \quad x_2^2 G^{(2)}_{x_2,x_2} + \quad x_3^2 G^{(2)}_{x_3,x_3} + \ldots + \quad x_n^2 G^{(2)}_{x_n,x_n} \\ + 2x_1x_2 G^{(2)}_{x_1,x_2} + 2x_1x_3 G^{(2)}_{x_1,x_3} + \ldots + 2x_1x_n G^{(2)}_{x_1,x_n} \\ + 2x_2x_3 G^{(2)}_{x_2,x_3} + \ldots + 2x_2x_n G^{(2)}_{x_2,x_n} \\ + \ldots + 2x_3x_n G^{(2)}_{x_3,x_n} \\ \vdots \\ + 2x_{n-1}x_n G^{(2)}_{x_{n-1},x_n} \equiv m(m-1)G \end{aligned}$$

oder in abgekürzter Bezeichnung:

$$(\text{III a}) \qquad \sum_i \sum_k x_i x_k G^{(2)}_{x_i,x_k} \equiv m(m-1)\, G,$$

wo die beiden durch Σ angedeuteten Summen derart auszuführen sind, dass jeder der beiden Indices i, k die Werte von 1 bis n einmal durchläuft.

Die Erweiterung auf höhere partielle Ableitungen bietet keine prinzipielle Schwierigkeit.

II. Kapitel.

Differentialquotienten der elementaren Funktionen.

§ 8. Stetigkeit einer ganzen Funktion von einer resp. zwei Variabeln. Differenzenquotient und Differentialquotient einer Funktion einer Variabeln.

Bei Gelegenheit der Behandlung der Tangente einer höheren Parabel (§ 7 (8)) haben wir bereits von einer Folgerung aus der binomischen Entwickelung (§ 7 (I)) einer ganzen Funktion $G(x)$ Gebrauch gemacht, die jetzt genauer untersucht werden soll. Aus (I):

$$(I)\quad G(x+h) - G(x) = h\,G_1(x) + \frac{h^2}{2!}\,G_2(x) + \frac{h^3}{3!}\,G_3(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\,G_n(x)$$

ergab sich unmittelbar, dass die linke Seite $G(x+h) - G(x)$ bei beliebig abnehmendem h unter jede Grenze sinkt, da dies mit jedem Gliede der rechten Seite, also auch mit der rechten Seite selbst der Fall ist. Man kann aber genauer fragen: Wie klein muss h gewählt werden, damit sich der absolute Wert $|G(x+h) - G(x)|$ der linken Seite von (I) unter einer vorgegebenen, beliebig kleinen (positiven) Grösse η befindet?

Es sei h zunächst positiv angenommen. Falls nicht etwa im besonderen für irgend einen gegeben gedachten Wert von x die Grössen $G_1(x)$, $\frac{G_2(x)}{2!}$, $\frac{G_3(x)}{3!}$, $\ldots$ $\frac{G_n(x)}{n!}$ alle einander gleich werden, wird eine von ihnen, absolut genommen, den grössten Wert besitzen. Wird der letztere mit M bezeichnet, so hat man:

$$(1)\quad \left|G(x+h) - G(x)\right|^{*}) \leqq Mh\,(1 + h + h^2 + \ldots + h^{n-1}) \leqq Mh\,\frac{1-h^n}{1-h}.$$

*) Der absolute Wert einer Grösse wird durch zwei, die Grösse einschliessende senkrechte Striche bezeichnet. Nach der Arithmetik (s. diese Sammlung Bd. 5) ist der absolute Wert einer Summe von zwei oder mehreren Grössen nicht grösser als die Summe der Absolutwerte der einzelnen Glieder, und der absolute Wert einer Differenz von zwei Grössen *nicht kleiner als* die Differenz der Absolutwerte der beiden Grössen.

Nehmen wir bereits h, also auch h^n kleiner als Eins an, so gilt umsomehr:

$$(2) \qquad \left| G(x+h) - G(x) \right| < \frac{Mh}{1-h}.$$

Soll also die linke Seite von (2) kleiner als η ausfallen, so tritt das sicher ein, wenn die rechte Seite von (2) kleiner als η gemacht wird:

$$(3) \quad \frac{Mh}{1-h} < \eta \quad \text{i. e.} \quad Mh < \eta - \eta h \quad \text{i. e.} \quad h < \frac{\eta}{M+\eta}.$$

Hat man einen solchen Wert von h gewählt, so ist für jeden noch kleineren Wert von h die Ungleichung (3) um so mehr erfüllt.

Wäre dagegen h negativ, so hätte man nur h durch seinen absoluten Wert zu ersetzen, um zu demselben Ergebnis zu gelangen.

In Analogie mit der Erklärung der Stetigkeit von a^x (§ 2, III) sagen wir:

„Eine ganze Funktion $G(x)$ ist eine *stetige* Funktion ihres Argumentes."

Im speziellen ist also auch eine Potenz x^n bei festem (positiv-ganzzahligen) Exponenten und variabler Basis x stetig, während in § 2 gerade umgekehrt a^x bei fester (positiver) Basis und variablem Exponenten als stetig nachgewiesen wurde. Um den Unterschied in der Auffassung der beiden Bildungen x^n, a^x hervortreten zu lassen, nennen wir die erstere von jetzt ab eine „Potenz" (mit natürlichem Exponenten), die letztere eine „Exponentialfunktion".

Die Eigenschaft der Stetigkeit von $G(x)$ kann auf Grund von (II), § 7 auf ganze Funktionen $G(x, y)$ von zwei Variabeln erweitert werden.

Wenn gleichzeitig h und k gegen Null konvergieren, thut das auch die ganze rechte Seite von (II), § 7, und damit die linke. Soll andererseits $\left| G(x+h, y+k) - G(x, y) \right| < \eta$ werden, wo η wiederum eine (positive) beliebig kleine, vorgegebene Grösse ist, so nennen wir M den grössten der absoluten Werte aller Bildungen $\frac{1}{(r+s)!} G_{r,s}$. Wird dann zunächst h, k positiv angenommen, so folgt aus (II), § 7:

$$(4)\quad |G(x+h,y+k)-G(x,y)| \leqq M(h+k)\{1+(h+k)+(h+k)^2+\ldots+(h+k)^n$$
$$\leqq M(h+k)\,\frac{1-(h+k)^n}{1-(h+k)}.$$

Für $h+k<1$ gilt also um so mehr:

$$(5)\qquad |G(x+h,\ y+k-G(x,y)| < \frac{M(h+k)}{1-(h+k)},$$

und es wird die linke Seite von (5) sicher kleiner als η, wenn

$$(6)\qquad \frac{M(h+k)}{1-(h+k)} < \eta \text{ i. e. } h+k < \frac{\eta}{M+\eta}$$

gewählt wird. Im Falle h oder k oder beide negativ sind, ersetze man sie durch ihre absoluten Werte. Somit haben wir:

„Eine ganze Funktion $G(x, y)$ von zwei Variabeln ist eine *stetige* Funktion derselben, d. h. man kann stets zwei solche Zuwüchse (Inkremente) h, k von x, y angeben, dass für sie — und um so mehr für alle Zuwüchse (Inkremente), deren absolute Werte unter denen von h, k liegen — der absolute Wert von $G(x+h, y+k)-G(x, y)$ unter einer vorgegebenen beliebig kleinen (positiven) Grösse η liegt."

In derselben Weise könnte man zu drei und mehr Variabeln aufsteigen; wir kommen später darauf zurück.

Die vornehmste Frage, die sich nunmehr erhebt, ist die, ob es auch für andere mathematische Ausdrücke oder Funktionen $f(x)$ von x, als die ganzen, Entwicklungen von der Art (1) giebt.

Zunächst ist leicht zu erkennen, dass eine für alle Werte von x und h gültige Entwicklung für $f(x+h)$ von dem Charakter der Entwicklung (I), d. h. eine solche, die mit der n^{ten} Potenz von h abbricht, während die Koeffizienten der Potenzen von h die Grösse h nicht mehr enthalten, ausschliesslich für ganze Funktionen einer Variabeln statt haben kann. Denn man braucht nur $x=0$ zu setzen, um $f(h)$ als ganze Funktion n^{ter} Ordnung von h zu erhalten, deren Koeffizienten h nicht mehr enthalten.

Dagegen wird man, nach dem Muster der unbegrenzten geometrischen Reihe (§ 2, IIa), fragen dürfen, ob nicht für irgend eine Funktion $f(x)$, wenigstens bei gewissen Ein-

schränkungen der Intervalle von x und h, eine Entwicklung von der Art gelten wird:

$$(II) \quad f(x+h) = f_0(x) + hf_1(x) + \frac{h^2}{2!}f_2(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f_n(x) + R_n(x,h),$$

wo die Koeffizienten der Potenzen von h endliche Ausdrücke sind, die nur noch x enthalten, während n so gross genommen werden kann, dass sich der „Rest" $R_n(x,h)$ für alle in Betracht kommenden Werte von x und h, absolut genommen, unter einer vorgeschriebenen, beliebig kleinen (positiven) Grösse η befindet?

Gesetzt es gäbe ein derartiges Gesetz (II), so hätte man damit ein weitreichendes Mittel gewonnen, beliebige „Funktionen" von x (d. h., wie wir vorläufig erklären, mathematische Ausdrücke, in denen eine veränderliche Grösse x vorkommt), nicht nur praktisch für irgend welche Werte des Argumentes x zu berechnen, sondern auch die tieferen Zusammenhänge zwischen den, verschiedenen Werten von x entsprechenden Werten des Ausdrucks f zu erforschen.

Indessen werden der Lösung dieses allgemeinen Problems die von gewissen Hilfsaufgaben vorangehen müssen.

Gesetzt, in der binomischen Entwicklung (I) einer ganzen Funktion $G(x)$ wüsste man von den Koeffizienten der einzelnen Potenzen von h nur, dass sie h nicht mehr enthalten und, wenigstens für ein gewisses Intervall von x, endlich bleiben, d. h. absolut genommen, eine festgegebene (positive) Zahl M nicht überschreiten. Dann braucht man nur $h = 0$ anzunehmen, um zu sehen, dass der Koeffizient von h^0 mit $G(x)$ übereinstimmt. Um weiter den Koeffizienten von h^1 zu ermitteln, kann man sich des nämlichen Grenzverfahrens bedienen, das dem oben beim Nachweise der Stetigkeit von $G(x)$ eingeschlagenen Wege zu Grunde lag. Zu dem Behufe schreiben wir die gedachte Entwicklung in der Gestalt:

$$(7) \quad \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = G_1(x) + \frac{h}{2!}G_2(x) + \frac{h^2}{3!}G_3(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n!}G_n(x)$$

$$(7a)\quad \frac{G(x+h)-G(x)}{h} - G_1(x) = h\left\{\frac{G_2(x)}{2!} + h\frac{G_3(x)}{3!} + \ldots + h^{n-2}\frac{G_n(x)}{n!}\right\}.$$

Wir können jetzt wieder h so klein wählen, dass fi den gewählten und a fortiori für jeden, absolut noch kleinere Wert von h, der absolute Wert der rechten Seite von (7 unterhalb einer vorgeschriebenen (positiven) Grösse δ vc beliebiger Kleinheit bleibt. Denn für ein positives h ($<$ ist der in Rede stehende Wert $\leqq M(h + h^2 + \ldots + h^{n-}$ i. e. $< \frac{Mh}{1-h}$, wo M der gröfste der absoluten Werte vc $\frac{G_2(x)}{2!}, \frac{G_3(x)}{3!}, \ldots, \frac{G_n(x)}{n!}$, und es braucht daher, um d gestellte Forderung zu erfüllen, nur $h < \frac{\delta}{M+\delta}$ gewählt werden. Hier ist der absolute Wert von h einzusetzen, falls ursprünglich negativ war.

Somit ist für ein beliebig abnehmendes h der Grenzwe der rechten Seite von (7a) gleich Null, d. i. der vc $\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$ gleich $G_1(x)$ und wir haben unter B nutzung der in § 5 (I) eingeführten Schreibweise:

$$(III)\qquad \lim_{h=0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = G_1(x).$$

„Damit ist aber die Ableitung $G_1(x)$ ein ganzen Funktion $G(x)$ in einer neuen, ve allgemeinerungsfähigen Gestalt festgelegt

Da wir ferner in § 7 III gesehen haben, dass $G_2(x)$, $G_3(x)$ die successiven Ableitungen von $G_1(x)$ waren, so lässt si unmittelbar folgern, dass:

$$(IIIa)\qquad \lim_{h=0} \frac{G_1(x+h)-G_1(x)}{h} = G_2(x),$$
$$\lim_{h=0} \frac{G_2(x+h)-G_2(x)}{h} = G_3(x) \text{ u. s. f.}$$

ist. Es lässt sich nun erwarten, dass analoge Ergebnis auch für die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von

in der allgemeinen Entwicklung (II) für eine beliebige Funktion gelten werden.

Damit werden wir zuvörderst zu der Aufgabe gedrängt, der Reihe nach für anderweit schon bekannte Ausdrücke $f(x)$, in denen eine variable Grösse x vorkommt — wie z. B. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, x^n (mit beliebigem Exponenten n), a^x, $\lg x$, denen sich weitere von selbst anschliessen werden — die durch die linke Seite von (III) angezeigte Grenzbildung näher zu untersuchen. Wir gehen also aus von dem Quotienten:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

d. h. wir vergleichen die „Aenderung" h des Argumentes x mit der zugehörigen Aenderung $f(x+h)-f(x)$ der Funktion, und suchen sodann dessen Grenzwert — falls er überhaupt existiert*) — für $\lim h = 0$ zu ermitteln:

$$\text{(V)} \qquad \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f_1(x).$$

Es wird sich zeigen, dass der Grenzwert (V) — und das ist ein weiterer innerer Grund seiner Wichtigkeit — fast stets ein einfacheres Gesetz befolgt, als die Bildung (IV).

Die Bildung (IV) nennt man den „Differenzenquotienten" der Funktion $f(x)$ für das Argument x und den Zuwachs h, die Bildung (V) die „Ableitung" oder den „Differentialquotienten von $f(x)$ nach x" für den Wert x; der in (V) vorgenommen gedachte Grenzprozess heisst Prozess des „Differenzierens" oder der „Differentiation von $y = f(x)$ nach x und wird kürzer mit einem Accent bezeichnet $y' = f'(x)$ — gesprochen: „y-Strich gleich f-gestrichen-x" oder „y-Strich gleich f-Strich-x".

Da die so definierte Ableitung von $f(x)$ für den Fall einer ganzen Funktion $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ mit der früher definierten (§ 7 II) zusammenfällt, so haben wir als erstes Ergebnis:

---

*) Geometrisch wird die Frage, nach dem Muster der Untersuchung über die höhere Parabel (§ 7), auf die Bestimmung der Tangente einer beliebigen ebenen Kurve in einem ihrer Punkte hinauskommen (s. den dritten Abschnitt, Kap. I).

„Die Ableitung (der Differentialquotient) einer ganzen Funktion m^{ter} Ordnung:

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

ist die ganze Funktion $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$G'(x) = G_1(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + m a_m x^{m-1},$$

also im besonderen für eine Potenz $G(x) = x^m$ ist $G_1(x) = m x^{m-1}$."

§ 9. Die Ableitungen (Differentialquotienten) der trigonometrischen Funktionen.

Nächst der Potenz x^m (mit natürlichem Exponenten) sind die in der elementaren Mathematik am häufigsten auftretenden Funktionen die trigonometrischen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$. Das Wort „Funktion" wird dabei wiederum in dem Sinne verstanden, dass x als ein veränderlicher Winkel (i. e. Bogen des Einheitskreises s. § 5) aufgefasst wird. Wie leicht zu erkennen, sind die nachfolgenden Rechnungen durch die Behandlung der geometrischen Tangentenaufgaben für Ellipse und Hyperbel in § 5 vorbereitet und stellen eigentlich nur eine andere Fassung der dortigen Entwicklungen dar. Um also die Differenz zweier Sinus-Werte $\sin(x+h)$ und $\sin x$ mit der Differenz h der Argumente zu vergleichen, bilden wir den Differenzenquotienten:

$$(1) \qquad \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Es handelt sich darum, in (1) zur Grenze $\lim h = 0$ überzugehen. Wir überzeugen uns zunächst von der „Stetigkeit" von $\sin x$ in dem in § 8 festgesetzten Sinne, dass also der absolute Wert von h stets so klein gewählt werden kann, dass der absolute Wert der Differenz $\sin(x+h) - \sin x$, d. i. des Zählers von (1), für den gewählten Wert von h und um so mehr für jeden absolut noch kleineren Wert kleiner ausfällt, als eine vorgegebene (positive) Grösse η von beliebiger Kleinheit.

Man führe, wie in § 5, halbe Winkel ein, so wird:

$$(2) \qquad \sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

h werde zunächst positiv angenommen. Da der absolute Wert von $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ höchstens gleich Eins werden kann, so hat man zunächst:

$$|\sin(x+h)-\sin x| \leqq 2\sin\frac{h}{2}. \tag{3}$$

In § 5 (2) zeigte sich, dass bei abnehmendem $\frac{h}{2}$ auch $\sin\frac{h}{2}$ abnimmt, dass aber stets $\sin\frac{h}{2}<\frac{h}{2}$ bleibt. Also geht (3) über in:

$$|\sin(x+h)-\sin x|<h. \tag{4}$$

Man hat demnach nur h selbst kleiner als η zu wählen, um die linke Seite von (4) unter η herunterzudrücken. Ist dagegen h negativ, $=-h_1$, so kommt in gleicher Weise:

$$|\sin(x-h_1)-\sin x| \leqq 2\sin\frac{h_1}{2}<h_1, \tag{3a}$$

und man hat nur h_1 d. i. den absoluten Wert von h, kleiner als η zu machen, um das nämliche Ziel zu erreichen. Also gilt:

„Der Sinus ist für jeden Wert seines Argumentes eine stetige Funktion".

Aus (2) folgt durch Division mit h:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x)}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} \tag{5}$$
$$=\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Nun konvergiert nach § 5 (I) für $\lim h=0$ der Bruch $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ gegen Eins, andererseits $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ gegen $\cos x$, somit gilt:

$$\text{(I)} \qquad \lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin' x = \cos x,$$

oder in Worten:

I „Der Differentialquotient des Sinus i
für jeden Wert des Argumentes der Cosinus

Man kann aber wiederum genauer nach dem Fehl
fragen, den man begeht, wenn man für irgend ein, wer
auch noch so kleines h, den Differenzenquotienten:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

durch den Differentialquotienten $\cos x$ ersetzt. Da sich hie
für die rechte Seite von (5) nicht eignet, bringen wir d
Zähler der linken Seite von (5) auf eine andere Form, b
der die halben Winkel erst an einer späteren Stelle ei
geführt werden. Nach § 5 (18a) ist:

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x &= \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \\ &= \sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h, \end{aligned}$$

also nach Division mit h:

$$\text{(7)} \qquad \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Dass man auch von dieser Gestalt des Differenze
quotienten aus für $\lim h = 0$ zu (I) gelangt, ist leicht
sehen. Denn einmal ist wiederum $\lim_{h=0} \frac{\sin h}{h} = 1$, andersei
ist nach § 5 (18):

$$\text{(8)} \qquad \cos h - 1 = -2\sin^2 \frac{h}{2},$$

somit kommt:

$$\text{(9)} \qquad \lim_{h=0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = -\sin x \cdot \lim_{h=0} \sin \frac{h}{2} \cdot \lim_{h=0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$
$$+ \cos x \lim_{h=0} \frac{\sin h}{h} = \cos x.$$

Nunmehr untersuchen wir auf Grund von (7), (8) die Differenz zwischen dem Differenzenquotienten:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

und dem Differentialquotienten $\cos x$:

$$\cos x - \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x(1-\cos h)+\cos x(h-\sin h)}{h}$$

$$= \sin x \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\frac{h}{2} + \cos x\left(1-\frac{\sin h}{h}\right). \tag{10}$$

Zunächst werde x als ein Winkel im ersten Quadranten angenommen, also $\sin x$ und $\cos x$ positiv; h sei ebenfalls ein Winkel des ersten Quadranten. Da dann $\frac{\sin h}{h}$ positiv und < 1, so sind die beiden Glieder rechter Hand von (10) positiv. Um die rechte Seite von (10) unter eine vorgegebene (positive) Grösse η herunterzudrücken, ersetzen wir sie durch etwas Grösseres, in dem h in einfacherer Gestalt auftritt. Zunächst wird das erste Glied der rechten Seite von (10), $\sin x \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\frac{h}{2}$ dadurch vergrössert, dass man $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ durch Eins, und $\sin\frac{h}{2}$ durch $\frac{h}{2}$ ersetzt:

$$\sin x \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\frac{h}{2} < \frac{h}{2}\sin x. \tag{11}$$

In § 5 (10) war nachgewiesen, dass:

$$\frac{\sin h}{h} > \cos^2\frac{h}{2} \quad \text{i. e.} \quad -\frac{\sin h}{h} < -\cos^2\frac{h}{2} \tag{12}$$

ist, somit ist auch:

$$(12a)\quad 1 - \frac{\sin h}{h} < 1 - \cos^2\frac{h}{2} < \left(1 - \cos\frac{h}{2}\right)\left(1 + \cos\frac{h}{2}\right) < 2 \cdot \sin^2\frac{h}{4}\left(1 + \cos\frac{h}{2}\right),$$

und da $1 + \frac{\cos h}{2} < 2$, und $\sin\frac{h}{4} < \frac{h}{4}$, so gilt umsomehr:

$$(13)\qquad 1 - \frac{\sin h}{h} < 4\sin^2\frac{h}{4} < \frac{h^2}{4} < \frac{h}{2}.$$

Durch Kombinierung der Ungleichungen (11), (13) mit der Gleichung (10) ergiebt sich also:

$$(14)\quad \cos x - \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} < \frac{h}{2}(\sin x + \cos x),$$

wo die linke Seite gemäss (10) sicher positiv ist. Soll also dieselbe $< \eta$ ausfallen, so hat man nur, da $\sin x + \cos x$ stets unterhalb Zwei*) bleibt, h so klein zu wählen, dass:

$$(15)\quad \frac{h}{2}(\sin x + \cos x) < \eta \quad \text{i. e.} \quad h < \frac{2\eta}{\sin x + \cos x} < \eta$$

wird.

Auf den soeben behandelten Fall kommen aber alle übrigen zurück.

Denn wenn h negativ, $= -h_1$, oder x ein Winkel in einem anderen Quadranten ist, oder beides, oder endlich h positiv $= h_1$, und x ein Winkel in einem anderen Quadranten, so lässt sich stets sofort (s. diese Sammlung, Bd. 3 § 28) ein Winkel x_1 im ersten Quadranten angeben, dass:

---

*) Nach der in § 18 (II) aufgestellten Regel würde sich sofort ergeben, dass $\sin x + \cos x$ innerhalb des ersten Quadranten seinen grössten Wert für $x = \frac{\pi}{2}$, nämlich $\sqrt{2}$ erreicht. Auch sonst liesse sich das Ergebnis (15) leicht noch weiter verschärfen. Später (§ 16) wird man auf kürzerem Wege ein besseres Ergebnis erlangen; das Entsprechende gilt von den analogen Entwicklungen des Folgenden.

16)
$$\left|\cos x - \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\right|$$
$$\leqq \sin x_1 \frac{\sin\frac{h_1}{2}}{\frac{h_1}{2}} \sin\frac{h_1}{2} + \cos x_1 \left(1 - \frac{\sin h_1}{h_1}\right)$$

ausfällt. Somit haben wir das Ergebnis gewonnen:

Ia „Der absolute Unterschied zwischen dem für ein Inkrement h genommenen Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten des Sinus lässt sich unter eine beliebig kleine (positive) Grösse η herunterdrücken, sobald man $|h|$ selbst $< \eta$ nimmt, gleichgültig welches der Wert des Argumentes ist."

Ein durchweg analoges Verhalten, wie $\sin x$, zeigt $\cos x$. Man hat:

(17)
$$\cos(x+h) - \cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

woraus wie oben folgt, dass der absolute Wert der linken Seite $< \eta$ wird, sobald der absolute Wert von $h < \eta$ ist:

„Der Cosinus ist für jeden Wert des Argumentes eine stetige Funktion."

Weiter kommt:

(18)
$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$$
$$= -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

mithin unmittelbar:

(II)
$$\lim_{x=0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos' x = -\sin x$$

oder in Worten:

II „Der Differentialquotient des Cosinus ist für jeden Wert des Argumentes der negativ genommene Sinus."

Bildet man wiederum die Differenz zwischen Differenzen- und Differentialquotienten, so entsteht, da

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h:$$

$$(19) \qquad \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} + \sin x$$

$$= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x + h \sin x}{h}$$

$$= \frac{\cos x(\cos h - 1) + \sin x(h - \sin h)}{h}$$

$$= -\cos x \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin \frac{h}{2} + \sin x \left(1 - \frac{\sin h}{h}\right).$$

An den zuletzt erhaltenen Ausdruck auf der rechten Seite von (19) knüpfen sich aber genau dieselben Folgerungen, wie oben beim Sinus, und man hat:

IIa „Die Eigenschaft Ia des Sinus kommt genau ebenso dem Cosinus zu."

Wir nehmen drittens die Funktion $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in Angriff.

Die Differenz der Funktion ist:

$$(20) \qquad \operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos x \cos(x+h)}$$

$$= \sin h \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x+h)}.$$

Von vornherein dürfen wir uns auf solche Werte h beschränken, die absolut $< \frac{\pi}{4}$ sind.

Soll die rechte Seite von (20) unter einer beliebig kleinen positiven Grösse η bleiben, so darf der Nenner nicht verschwinden, es sind also jedenfalls die Werte von x auszuschliessen, für die $\cos x$ verschwindet. Da wir uns auf die Winkel x der ersten vier Quadranten beschränken können, so ist $\cos x = 0$ nur für $\pm \frac{\pi}{2}$. Für jeden andern Wert von x kann man offenbar h immer so wählen, dass $\cos(x+h)$ von Null verschieden ausfällt.

Es sei zunächst x ein gegebener Winkel im ersten Quadranten, h positiv. Wie nahe sich auch x an dem Werte $\frac{\pi}{2}$ befinde, immer lässt sich noch ein Wert $x+a$ zwischen x und $\frac{\pi}{2}$ angeben. Wird nun h zuvörderst $< a$ gewählt, so ist $\cos(x+h) > \cos(x+a)$, und die rechte Seite von (20) wird demnach vergrössert, wenn man im Nenner $\cos(x+h)$ durch $\cos(x+a)$ ersetzt; eine abermalige Vergrösserung findet bei der Ersetzung von $\sin h$ durch h statt, so dass:

$$\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x < \frac{h}{\cos x \cos(x+a)}. \tag{21}$$

Soll jetzt $\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x < \eta$ werden, so geschieht das, indem man h auch noch $< \eta \cos x \cos(x+a)$ wählt.

Ist dagegen h negativ, $= -h_1$, so ist, falls x der zweiten Hälfte des ersten Quadranten angehört, $\cos(x+h) > \cos x$, und es genügt daher allein schon, $h_1 < \eta \cos^2 x$ zu wählen, um $|\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x| < \eta$ zu machen.

Liegt x dagegen in der ersten Hälfte des ersten Quadranten, so kann $x+h$ eventuell auch im vierten Quadranten liegen, und dabei $\cos(x+h)$ sowohl grösser wie kleiner als $\cos x$ sein. Sicher aber ist in diesem Falle, da $h_1 < \frac{\pi}{4}$ bleibt, stets $\cos(x+h) > \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, i. e. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; somit sinkt $|\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x|$ sicher unter die Grösse η, falls man $h_1 < \frac{\eta \cos x}{\sqrt{2}}$ wählt.

Für den Übergangsfall $x = \frac{\pi}{4}$, also $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gelten beide Ergebnisse: da jetzt $\cos^2 x = \frac{\cos x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, so genügt die Wahl $\eta_1 < \frac{\eta}{2}$.

Da die Betrachtung für die drei übrigen Quadranten analog verläuft, so ergiebt sich folgende Regel:

$$\left(|h| < \frac{\pi}{4},\ x \neq \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right).$$

a) Bei positivem h und einem x des ersten resp. dritten Quadranten oder bei negativem h und einem x des zweiten resp. vierten Quadranten sei $x + \alpha$ irgend ein Wert zwischen x und $\frac{\pi}{2}$ resp. $\frac{3\pi}{2}$, dann wähle man h so, dass $|h|$ kleiner ausfällt, als der kleinere der beiden Werte $|\alpha|$ und $\eta \cos x \cos(x + \alpha)$;

b) bei negativem h und einem x in der ersten Hälfte des ersten resp. dritten Quadranten oder bei positivem h und einem x in der zweiten Hälfte des zweiten resp. vierten Quadranten wähle man h so, dass $|h| < \frac{\eta |\cos x|}{\sqrt{2}}$;

c) bei negativem h und einem x in der zweiten Hälfte des ersten resp. dritten Quadranten oder bei positivem h und einem x in der ersten Hälfte des zweiten resp. vierten Quadranten wähle man h so, dass $|h| < \eta \cos^2 x$: dann wird in allen Fällen $|\mathrm{tg}(x + h) - \mathrm{tg}(x)| < \eta$.

Das Hauptergebnis ist demnach:

„Die Funktion $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist, mit Ausnahme der Werte x, für die der Nenner $\cos x$ verschwindet, überall eine stetige Funktion von x."

Aus (20) ergiebt sich als Differenzenquotient von $\mathrm{tg}\, x$:

$$\text{(22)} \qquad \frac{\mathrm{tg}(x + h) - \mathrm{tg}\, x}{h} = \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x + h)},$$

und somit, da $\lim\limits_{h=0} \frac{\sin h}{h} = 1$, $\lim\limits_{h=0} \cos(x + h) \cos x = \cos^2 x$:

$$\text{(III)} \qquad \lim_{h=0} \frac{\mathrm{tg}(x + h) - \mathrm{tg}\, x}{h} = \mathrm{tg}'\, x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

oder in Worten:

III „Der Differentialquotient des Tangens ist der reziproke Wert vom Quadrat des Cosinus, mit Ausnahme der Fälle, wo der letztere verschwindet."

Auch hier möge die genauere Untersuchung folgen, wie klein $|h|$ zu wählen ist, um den absoluten Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient kleiner als η zu machen.

Man hat der Reihe nach:

$$(23)\quad \frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}x}{h}-\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin h}{h\cos x\cos(x+h)}-\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x\cos(x+h)}\cdot\frac{\sin h\cos x-h\cos(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x\cos(x+h)}\cdot\frac{\sin h\cos x-h\cos x\cos h+h\sin x\sin h}{h}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x\cos(x+h)}\cdot\left\{\cos x\cdot\frac{\sin h-h\cos h}{h}+\sin x\sin h\right\}.$$

Es sei zunächst wiederum x ein Winkel des ersten Quadranten, und h positiv, so, dass auch $x+h$ noch dem ersten Quadranten angehört.

Nach § 5 (2) ist dann $\frac{\sin h}{h}>\cos h$, i. e. $\sin h - h\cos h$ positiv.

Diese positive Grösse $\sin h - h\cos h$ wird, wie auch $\sin x\sin h$, vergrössert, indem man $\sin h$ durch h ersetzt, wodurch $\sin x\sin h$ in $h\sin x$ und $\frac{\sin h - h\cos h}{h}$ in $1-\cos h = 2\sin^2\frac{h}{2}$ übergeht, das abermals vergrössert wird, wenn man $\sin\frac{h}{2}$ durch $\frac{h}{2}$ ersetzt.

Schliesslich setze man auch noch eins für $\sin x$ und $\cos x$ innerhalb der geschweiften Klammer der rechten Seite von (23), dann ist um so mehr:

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}(x)}{h}-\frac{1}{\cos^2 x}<\frac{1}{\cos^2 x\cos(x+h)}\left(\frac{h^2}{2}+h\right)<\frac{2h}{\cos^2 x\cos(x+h)}. \tag{24}$$

Für ein negatives $h=-h_1$ wird $\sin h - h\cos h = -(\sin h_1 - h_1\cos h_1)$ und man hat ohne weiteres für negatives, wie auch für positives h:

$$\left|\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}(x)}{h}-\frac{1}{\cos^2 x}\right|<\frac{2|h|}{\cos^2 x\,|\cos(x+h)|}. \tag{24a}$$

Das nämliche ergiebt sich, in welchem Quadranten x auch liegen möge. Soll die rechte Seite von (24a) $<\eta$ gemacht werden, so stellen sich ganz analog die Ueberlegungen ein, wie bei der Untersuchung der Stetigkeit von tg x, wo $\frac{|h|}{|\cos x\cos(x+h)|}<\eta$ werden sollte. Somit hat man unmittelbar den Satz:

„Soll $\left|\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}(x)}{h}-\frac{1}{\cos^2 x}\right|$ durch geeignete Wahl von h unter eine beliebig kleine, positive, vorgegebene Grösse η heruntergedrückt werden, so hat man nur in den obigen Regeln (a) (b) (c) für die Stetigkeit von tg x je einen Faktor $\cos x$ durch $\frac{\cos^2 x}{2}$ zu ersetzen".

Die vierte trigonometrische Funktion $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ist genau nach dem Muster von tg x zu behandeln; wir dürfen uns daher begnügen, die Ergebnisse anzuführen:

„Die Funktion $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ist überall stetig, mit Ausnahme der Werte von x, für die der Nenner $\sin x$ verschwindet".

Ferner wird

$$\lim_{h=0}\frac{\operatorname{cotg}(x+h)-\operatorname{cotg} x}{h}=\operatorname{cotg}' x$$
$$=\lim_{h=0}-\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\sin x\sin(x+h)}=-\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{IV}$$

oder in Worten:

IV „Der Differentialquotient des Cotangens ist der negativ zu nehmende reziproke Wert vom Quadrat des Sinus, ausgenommen wenn der letztere verschwindet."

Es wird nützlich sein, die analytischen Prozesse für die Bildung der Differentialquotienten der trigonometrischen Funktionen mit einem geometrischen Gedankengange zu begleiten.

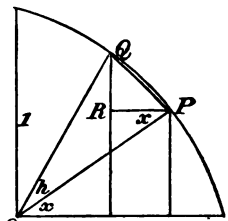


Fig. 9.

Um den Sinus zu verfolgen, seien etwa x und $x + h$ ($h > 0$) zwei Winkel des ersten Quadranten im Einheitskreise, mit den Endpunkten P, Q (s. Fig. 9).

Dann stellt die Länge QR die Differenz $\sin(x + h) - \sin x$ vor. Für einen hinreichend kleinen Winkel (i. e. Bogen) h lässt sich h näherungsweise durch die Sehne PQ, d. h. die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes PQR ersetzen; es ist also näherungsweise und um so genauer, je kleiner h wird:

$$(25) \qquad \frac{\sin(x+h) - \sin h}{h} = \frac{QR}{QP} = \cos \sphericalangle (PQR).$$

Für $\lim h = 0$ wird die Sehne PQ zur Tangente in P werden, die nach den Elementen der Planimetrie senkrecht auf dem Radius OP steht, somit ist wiederum näherungsweise $\sphericalangle RPQ$ das Komplement von x, d. h. $\sphericalangle PQR = x$ selbst. Mithin geht die rechte Seite von (25), falls man h klein genug wählt, mit beliebiger Genauigkeit in $\cos x$ über. Das ist aber der Inhalt der Formel (I).

In derselben Weise zeigt die Figur die Bedeutung der Formel (II). Uebrigens ist (II) leicht direkt auf (I) zurückführbar. Denn da:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

so lässt sich der Differenzenquotient von $\cos x$ auch so schreiben:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(x+h)\right\}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{h}$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\} \tag{26}$$

$$= -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

wo die rechte Seite für $\lim h = 0$ unmittelbar in $-\sin x$ übergeht.

Für die Funktion tg x wird die Figur etwas komplizierter. Seien wiederum x und $x+h$, $h>0$, zwei Winkel des ersten Quadranten (s. Fig. 10). Die Differenz tg $(x+h)$ — tg x sei zur Abkürzung mit Δt bezeichnet. Der Bogen $PQ = h$ werde wiederum näherungsweise durch die Sehne PQ ersetzt. Als Hilfslinie lege man eine Parallele zu Δt durch P: das Stück PS dieser Parallelen von P bis zum Schnittpunkt S mit dem verlängerten Radius OQ sei mit p bezeichnet. Da $\sphericalangle QPO$ näherungsweise ein Rechter ist, so ist $\sphericalangle QPS$ näherungsweise gleich x, und das Dreieck QPS ist näherungsweise ein rechtwinkliges. Dann ist nach dem Aehnlichkeitssatz der Dreiecke (s. die Planimetrie dieser Sammlung), da $p \parallel \Delta t$:

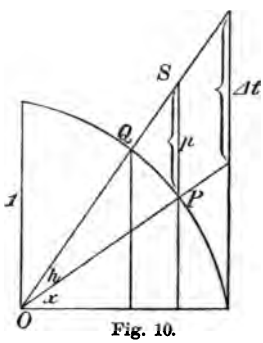


Fig. 10.

$$p : \Delta t = 1 : \frac{1}{\cos x}, \quad \text{i. e.} \quad \Delta t = \frac{p}{\cos x}, \tag{27}$$

und im Dreieck PQS näherungsweise:

$$p = \frac{PQ}{\cos x}, \tag{28}$$

und wegen (27) in demselben Sinne:

29) $$\frac{\Delta t}{PQ} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{oder auch} \quad \frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

nd zwar um so genauer, je kleiner h ist. Das ist aber der ıhalt der Aussage (III). Analog wird $\operatorname{cotg} x$ behandelt. In-ɛssen lässt sich auch $\operatorname{cotg} x$ direkt auf $\operatorname{tg} x$ zurückführen, sofern $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, mithin:

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{cotg} x}{h} = \frac{\operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{2} - (x+h)\right\} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{h}$$

0) $$= \frac{\sin(-h)}{h} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left\{\frac{\pi}{2} - (x+h)\right\}}$$

$$= -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\sin x \sin(x+h)},$$

ɔ die rechte Seite für $\lim h = 0$ in $-\frac{1}{\sin^2 x}$ übergeht.

Der innere Grund, warum bei den Ableitungen von ɛs x und $\operatorname{cotg} x$ ein negatives Vorzeichen auftritt, wird in 18 erörtert werden. In der elementaren Trigonometrie werden ıweilen noch als weitere Funktionen $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ und c $x = \frac{1}{\cos x}$ eingeführt. Um auch diese noch mit zu er-digen, setzen wir an:

$$\frac{\operatorname{sec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h} = \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right\}$$

1) $$= -\frac{1}{h \sin x \sin(x+h)}[\sin(x+h) - \sin x],$$

ıit kommt nach (I) für $\lim h = 0$:

7) $$\operatorname{cosec}' x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

ıd ganz analog:

71) $$\sec' x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

§ 10. Die Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen oder die cyklometrischen Funktionen nebst ihren Ableitungen. Allgemeiner Begriff der Funktion und ihrer Umkehrung.

Schon in § 5 trat die Auffassung hervor, den Kreisbogen durch geradlinige Sinus- und Cosinus-Längen zu bestimmen, d. h. den Kreisbogen als abhängig von trigonometrischen Funktionen anzusehen. Auch in der elementaren Trigonometrie (s. diese Sammlung, Band 3, § 51) ist es eine bekannte Aufgabe, wenn der Wert eines Sinus oder Cosinus oder Tangens oder Cotangens gegeben ist, den zugehörigen Winkel (Bogen) mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Hierbei zeigt sich aber die Misslichkeit, dass die Aufgabe im allgemeinen je zwei verschiedene Lösungen, d. h. innerhalb des Vollwinkels je zwei verschiedene Winkel zulässt.

Man wird zunächst versuchen, durch geeignete Einschränkung der Definition, „des zu einer trigonometrischen Funktion gehörigen Winkels" die in Rede stehenden Aufgaben zu eindeutigen zu machen, i. e. einem vorgegebenen Wert einer trigonometrischen Funktion einen einzigen, völlig bestimmten Wert des Winkels (Bogens) zuzuordnen und diesen als „Umkehrung" der bezüglichen trigonometrischen Funktion selbständig einzuführen.

Dies geschieht am einfachsten durch folgende Festsetzungen:

1) Wenn $y = \sin x$ gesetzt wird, so ordne man einem positiven Wert von y zwischen 0 und 1 $(0 < y \leqq 1)$ den zugehörigen Winkel x des ersten Quadranten $\left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, dagegen einem negativen Wert von y $(0 > y \geqq -1)$ den zugehörigen negativen Winkel x $\left(0 > x \geqq -\frac{\pi}{2}\right)$ des „negativen ersten" (oder vierten) Quadranten zu, endlich dem Werte $y = 0$ den Wert $x = 0$;

2) Wenn $y = \operatorname{tg} x$ gesetzt wird, so verfahre man im wesentlichen wie bei 1): einem positiven Wert von y $(0 < y \leqq \infty)$ ordne man den zugehörigen Winkel x $\left(0 < x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

des ersten Quadranten zu, einem negativen Wert von y $(0>y\geqq-\infty)$ den zugehörigen negativen Winkel $x\left(0>x\geqq-\frac{\pi}{2}\right)$ des negativen ersten Quadranten, und dem Werte $y=0$ den Wert $x=0$;

3) Wenn $y=\cos x$ gesetzt wird, so ordne man einem positiven Wert von y $(1\geqq y\geqq 0)$ den zugehörigen Winkel $x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ des ersten Quadranten zu, dagegen einem negativen Werte von y $(0\geqq y\geqq-1)$ den zugehörigen Winkel x des zweiten Quadranten $\left(\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi\right)$;

4) Analog, wenn $y=\operatorname{cotg} x$ gesetzt wird, so ordne man einem positiven Werte von y $(+\infty\geqq y\geqq 0)$ den zugehörigen Winkel x des ersten Quadranten $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ zu, dagegen einem negativen Werte von y $(0\geqq y\geqq-\infty)$ den zugehörigen Winkel x des zweiten Quadranten $\left(\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi\right)$.

Diese vier Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen $y=\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ werden bezeichnet mit $x=\arcsin y$, $\operatorname{arccos} y$, $\operatorname{arctg} y$, $\operatorname{arccotg} y$ (gesprochen: arcus sinus y u. s. w.), das soll heissen: x gleich dem arcus (Bogen), dessen Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens gleich y ist, und heissen auch die „cyclometrischen" (d. i. die Länge des Kreisbogens messenden) Funktionen.

Um für diese neuen Funktionen die Differentialquotienten zu bilden, wird es zweckmässig sein, um die Gegenüberstellung der Grössen x und y schärfer hervortreten zu lassen, die bisher gebrauchten Bezeichnungen in einigen Punkten abzuändern resp. auszugestalten; die Uebertragung auf weiterhin noch zu betrachtende Funktionen wird dann leichter zu vollziehen sein.

Zunächst soll immer die veränderlich gedachte Grösse, sei es x oder y, von der jeweils ausgegangen wird, die „unabhängige" Variable (Veränderliche); die andere die „abhängige" Variable (Veränderliche) oder die Funktion der unabhängigen Variablen (Veränderlichen) heissen.

Während früher die Aenderung von x mit h bezeichnet wurde, möge jetzt gleichmässig die Aenderung (der „Zu-

wachs“ oder das „Increment“) von x resp. y mit Δx u Δy bezeichnet werden, so dass also der Differenzenquo der Funktion y von x durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der Differenzenquo der „umgekehrten“ oder „inversen“ Funktion x v durch $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ angegeben wird.

Dann besteht offenbar als erstes Gesetz:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}=1 \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}},\ \frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Hier kann man, falls der Grenzübergang $\lim \Delta x$ gestattet war, auch den Grenzübergang $\Delta y = 0$ vorneh und erhält:

$$\text{(B)} \qquad \lim_{\Delta y=0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \text{oder kürzer (s. u.):} \quad x'=\frac{1}{y'},$$

wo wiederum der Fall auszuschliessen ist, dass der Nenn verschwindet.

Indessen können wir noch genauer, sobald uns bek ist, dass der Unterschied $\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'$, absolut genommen, u halb einer Grösse η liegt, auch den absoluten Unters $\frac{\Delta x}{\Delta y}-x'$ abschätzen.

Denn da nach (A) und (B):

$$\text{(5)} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y}-x'=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}-\frac{1}{y'}=\frac{y'-\frac{\Delta y}{\Delta x}}{y'\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

so kommt unmittelbar:

$$\text{(6)} \qquad \left|\frac{\Delta x}{\Delta y}-x'\right|<\frac{\eta}{\left|y'\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|}.$$

Das gilt nicht bloss für die hier zunächst zu u suchende Umkehrung der trigonometrischen Funktionen, dern allgemein.

Zu dem Behuf definieren wir:

„Eine veränderliche Grösse y ist eine Funktion einer andern veränderlichen Grösse x — in Zeichen $f(x)$ —, wenn es eine mathematische Rechnungsvorschrift giebt, vermöge deren es möglich ist, wenigstens innerhalb eines gewissen Intervalles (Spielraumes) von x, jedem gegeben gedachten Werte von x einen einzigen, völlig bestimmten Wert y zuzuordnen. Ist auch das Umgekehrte ausführbar, so heisst x, als Funktion von y, die Umkehrung von y (als Funktion von x), oder auch kurz „die umgekehrte (inverse) Funktion."

Dann sagt die Formel (B), vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten der beiden Funktionen y von x, x von y, in eindeutig bestimmter Weise existieren, aus:

(B) „Der Differentialquotient von der Umkehrung einer Funktion ist das Reziproke von dem Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion."

Um mit derartigen Formeln, wie (B), bequemer rechnen zu können, wird es nötig sein, die Bezeichnung der Differentialquotienten geeignet abzukürzen. Zuvörderst lässt man das Limes-Zeichen weg, und deutet den vollzogenen Grenzprozess dadurch an, dass man den Buchstaben Δ durch d ersetzt, schreibt also:

$$(7) \qquad \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim_{\Delta y=0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}.$$

Hierbei sollen aber die Zeichen dx, dy — die man die „Differentiale" von x resp. y nennt — vorderhand keine selbständigen Grössen vorstellen, sondern eben nur in der hier stehenden Verbindung einen Sinn haben, nämlich den in (7) festgesetzten.

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen, und — wie bereits in (5), (6) und in §§ 7, 8, 9, geschehen — den Grenzprozess durch ein einziges Zeichen, etwa einen Accent oder Strich repräsentieren:

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dx}{dy} = x', \tag{8}$$

zu sprechen: „y-Strich“, „x-Strich“.

Legt man Wert darauf, die Funktionsbezeichnung hir zufügen, so schreibt man, wenn $y = f(x)$, und x etwa $= \varphi$ gesetzt wird:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = y', \quad \frac{d\varphi(x)}{dy} = \varphi'(y) = x', \tag{8a}$$

zu sprechen: „f-gestrichen-x“ oder „f-Strich-x“, entsprechend bei φ.

Nach diesen äusserlichen Festsetzungen gehen wir d über, mittels (B) die gesuchten Differentialquotienten cyklometrischen Funktionen $x = \arcsin y$, $\arccos y$, arct arccotg y auf Grund der Ergebnisse (I), (II), (III), (des § 9 zu ermitteln.

Zuvor beantworten wir wiederum die Frage nach Stetigkeit der cyklometrischen Funktionen.

Für $y = \sin x$ war, nach § 9 (2), für $h = \sin(x + h) - \sin x = \Delta y$,

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \tag{9}$$

Wie klein ist der absolute Wert von Δy zu wählen, da der von Δx unter eine vorgegebene, beliebig kleine, posi Grösse ε sinkt? Sei zunächst wieder y und Δy positiv, auch x und Δx. Nach § 5 (2) ist $\frac{\Delta x}{2} < \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\cos \frac{\Delta x}{2}}$, so wegen (9):

$$\Delta x < \Delta y \cdot \frac{1}{\cos \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}. \tag{10}$$

Zwischen $x + \Delta x$ und $\frac{\pi}{2}$ greife man einen Wert x heraus, dann ist $\cos(x + \alpha) < \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, und es ist umsom

$$\Delta x < \Delta y \cdot \frac{1}{\cos\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\alpha)}. \tag{11}$$

Da weiter $\frac{\Delta x}{2}$ jedenfalls bereits kleiner als $\frac{\pi}{4}$ angenommen werden darf, und $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so kommt *a fortiori*:

$$\Delta x < \Delta y \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos(x+\alpha)}. \tag{12}$$

Wird endlich der $x+\alpha$ entsprechende Wert des Sinus zwischen $y+\Delta y$ und 1 mit $y+\beta$ bezeichnet, so hat man $\cos(x+\alpha) = +\sqrt{1-(y+\beta)^2}$, also:

$$\Delta x < \Delta y \cdot \frac{\sqrt{2}}{+\sqrt{1-(y+\beta)^2}}. \tag{13}$$

Dies Ergebnis bleibt offenbar gültig, auch wenn x und Δx nicht mehr beide positiv sind (nur dass für ein negatives x $y+\beta$ einen Wert zwischen $y+\Delta y$ und -1 bedeutet), sobald man Δx und Δy in (13) durch ihre absoluten Werte ersetzt.

Mithin hat man nur $|\Delta y| < \varepsilon\sqrt{\frac{1-(y+\beta)^2}{2}}$ zu wählen, um $|\Delta x| < \varepsilon$ zu machen; hierbei ist $y+\beta$ ein Wert zwischen $y+\Delta y$ und $\pm\frac{\pi}{2}$, je nachdem x, also auch y, positiv oder negativ ist.

Da eine ganz analoge Rechnung für arccos y besteht, so gilt:

„Die Funktionen arcsin und arccos sind stetige Funktionen ihres Argumentes."

Noch einfacher ist die Ueberlegung bei arctg y resp. arccotg y.

Noch § 9 (20) war:

$$\Delta y = \sin\Delta x \cdot \frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)}, \tag{14}$$

und da $|\Delta x| < \frac{|\sin\Delta x|}{\cos\Delta x}$, $\cos\Delta x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\cos x\cos(x+\Delta x)| < 1$, so kommt in allen Fällen:

$$|\Delta x| < |\Delta y|\sqrt{2}, \tag{15}$$

9507 90

und man hat nur $|\Delta y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ zu machen, um $|\Delta x| < \varepsilon$ zu erhalten.

Da die Betrachtung für arccotg y fast die nämliche ist, so gilt:

„Die Funktionen arctg und arccotg sind stetige Funktionen ihres Argumentes."

Die Bildungen der Ableitungen der cyklometrischen Funktionen vollziehen sich folgendermassen.

Nach § 9 (I) war für $y = \sin x$, $y' = \cos x$, also wird nach (B):

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x}. \tag{16}$$

Da aber konsequenterweise das Argument des Differentialquotienten einer Funktion stets durch die jeweilige unabhängige Variable auszudrücken sein wird, so erübrigt noch, auf der rechten Seite von (16) statt der abhängigen Variabeln x die unabhängige $y\,(= \sin x)$ einzuführen. Nun ist:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}, \tag{17}$$

und zwar ist das Vorzeichen positiv zu wählen, da nach der getroffenen Festsetzung (1) der Bogen $x = \arcsin y$ nur dem ersten, positiven oder negativen Quadranten angehört, für den also der zugehörige Cosinus positiv ausfällt. Damit ist als Ableitung des $\arcsin y$ gefunden:

$$x' = (\arcsin y)' = \frac{1}{+\sqrt{1 - y^2}}, \tag{18}$$

oder, wenn wir nunmehr die unabhängige Variable wiederum mit x bezeichnen:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}. \tag{I}$$

Hier sind nur die Werte $x = \pm 1$, für die der Nenner rechts von (I) verschwinden würde, auszuschliessen.

Nur wenig verschieden verläuft die Rechnung für $\arccos y$.

Nach § 9 (II) ist für $y = \cos x$, $y' = -\sin x$, somit nach (B):

$$x' = (\arccos y)' = -\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 x}}, \quad = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \tag{19}$$

Das gewählte Vorzeichen der Quadratwurzel ist das richtige, da gemäss der Festsetzung (3) x ein Bogen des ersten oder zweiten Quadranten ist, so dass also der Sinus positiv ausfällt.

Somit lautet die Ableitung des arccos, wenn wiederum x die unabhängige Variable bezeichnet:

$$\text{(II)} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

Ferner war für $y = \operatorname{tg} x$ nach § 9 (III) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, also kommt nach (B):

$$(20) \qquad x' = (\operatorname{arctg} y)' = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2},$$

also für x als unabhängige Variable:

$$\text{(III)} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Endlich ergiebt sich auf ganz analogem Wege:

$$\text{(IV)} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Es möge auch hier wieder, und zwar auf Grund von (A) und (B) auf die genauere Untersuchung eingegangen werden, wie klein Δy zu wählen ist, damit der Unterschied zwischen Ableitung und Differenzenquotient von $\arcsin y$ resp. $\arccos y$, $\operatorname{arctg} y$, $\operatorname{arccotg} y$ unter eine vorgegebene, beliebig kleine, positive Grösse heruntergedrückt wird. Es wird indessen genügen, in dieser Hinsicht $\arcsin y$ und $\operatorname{arctg} y$ zu behandeln, da die entsprechenden Rechnungen für $\arccos y$ und $\operatorname{arccotg} y$ vollkommen analog sind. Der Einfachheit halber sei zunächst wieder x, wie Δx, positiv vorausgesetzt.

Für $x = \arcsin y$ kommt nach § 9 (5), (I) und (A), (B):

$$(20) \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} - x' = \left(y' - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{\cos x \dfrac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}.$$

Die rechte Seite wird vergrössert, wenn $y' - \frac{\Delta y}{\Delta x}$ gemäss § 9 (14) durch den zu grossen Wert Δx ersetzt wird, der selbst nach § 9 (5) $= \Delta y \cdot \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}} \frac{1}{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}$ ist:

$$(21)\quad \frac{\Delta x}{\Delta y} - x' < \Delta y \cdot \frac{1}{\cos x \cos^2\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}}\right)^2.$$

Nach § 5 (2) ist:

$$\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}} < \frac{1}{\cos\frac{\Delta x}{2}} < \sqrt{2};$$

ferner ist, wenn wieder $x+a$ einen Wert zwischen $x+\Delta x$ und $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet, $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) > \cos(x+a)$, $\cos x > \cos(x+a)$, somit, wenn $y+\beta$ dem Werte $x+a$ entspricht:

$$(22)\quad \frac{\Delta x}{\Delta y} - x' < \Delta y \cdot \frac{2}{\cos^3(x+a)},\ \text{i. e.} < \Delta y \cdot \frac{2}{\{1-(y+\beta)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Da für ein negatives x resp. Δx nur geringe Modifikationen eintreten, so gilt:

„Soll für $x = \arcsin y$ $\left|x' - \frac{\Delta x}{\Delta y}\right| < \varepsilon$ werden,

so genügt es, $|\Delta y| < \frac{\varepsilon}{2}\{1-(y+\beta)^2\}^{\frac{3}{2}}$ zu nehmen,

wo $y+\beta$ irgend ein Wert zwischen y und ± 1 ist, je nachdem y positiv oder negativ war.“

In derselben Weise ergiebt sich nach § 9 (20), (24) und (III) für $x = \operatorname{arctg} y$, positive x, Δx:

$$(23)\quad x' - \frac{\Delta x}{\Delta y} < \frac{2\Delta x}{\cos^2 x \cos(x+\Delta x)} \cdot \frac{\Delta x}{\sin \Delta x} \cdot \cos^3 x \cos(x+\Delta x),$$

$$\text{i. e. } < 2\Delta x \cos x \left(\frac{\Delta x}{\sin x}\right),$$

oder nach Einführung von Δy gemäss § 9 (20):

$$(24)\quad x' - \frac{\Delta x}{\Delta y} < 2\Delta y \left(\frac{\Delta x}{\sin \Delta x}\right)^2 \cos^2 x \cos(x+\Delta x),$$

und da wie oben $\frac{\Delta x}{\sin \Delta x} < \sqrt{2}$, ferner $\cos^2 x \cos(x+\Delta x) < 1$:

$$(25)\quad x' - \frac{\Delta x}{\Delta y} < 4\Delta y.$$

Werden wieder die Fälle, wo x oder Δx negativ, mitberücksichtigt, so gilt in allen Fällen:

„Soll für $x = \text{arctg}\, y$ der absolute Wert von $x' - \frac{\Delta x}{\Delta y} < \varepsilon$ werden, so genügt es, den absoluten Wert von $\Delta y < \frac{\varepsilon}{4}$ zu wählen."

In der Theorie der Taylorschen Reihe und ihres Restgliedes werden wir aber ein Hilfsmittel kennen lernen, das derartige Aufgaben weit leichter zu lösen gestattet (§ 19).

Der Vergleich der Formeln (I), (II), (III), (IV) mit den entsprechenden des § 9 giebt zu einigen wichtigen Bemerkungen Anlass. Die Formeln des § 9 sagen im wesentlichen aus, dass die Differentialquotienten der trigonometrischen Funktionen wiederum trigonometrische Ausdrücke sind. Dagegen zeigen die Differentialquotienten der cyklometrischen Funktionen ein wesentlich anderes Verhalten. Es sind das Ausdrücke, die aus der Grösse x durch die arithmetischen „Operationen" der vier Spezies (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division), bei (I) und (II) noch mit Hinzunahme der fünften Operation, des Radizierens entstanden sind; derartige Ausdrücke nennt man „algebraische" Ausdrücke (oder Funktionen) von x.

Wir betonen dies Ergebnis:

„Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen sind wiederum trigonometrische Ausdrücke, dagegen die der cyklometrischen Funktionen algebraische Ausdrücke."

In der Analysis werden die algebraischen Ausdrücke als die einfacheren, alle nicht algebraischen („transcendenten") Ausdrücke als die komplizierteren und erst in zweiter Linie zu untersuchenden angesehen. Der gewonnene Satz legt somit die Vermutung nahe, dass es möglich sein wird — indem man den eingeschlagenen Weg des Differenzierens rückwärts durchläuft — die cyklometrischen Funktionen, und damit auch ihre Umkehrungen, die trigonometrischen, von den algebraischen Ausdrücken aus, die die rechten Seiten von (I)—(IV) bilden, d. h. ohne jede Benutzung geometrischer Mittel aufzubauen. Die Durchführung dieser Aufgabe bleibt der Integralrechnung vorbehalten.

§ 11. Der Differentialquotient einer beliebigen Potenz x^n. Der Differentialquotient einer Funktion einer Funktion von x.

In § 8 ergab sich auf Grund des binomischen Satzes, dass der Differentialquotient einer Potenz $y = x^n$ (mit positiver Basis x), wenn der Exponent n eine natürliche Zahl war, den Wert nx^{n-1} hatte:

$$(1) \qquad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

In der Arithmetik wird entwickelt, wie sich die Hauptgesetze, denen diese einfachsten Potenzen x^n gehorchen, der Reihe nach auf Potenzbildungen übertragen lassen, für die der Exponent successive negativ ganzzahlig $= -n$, gebrochen, $= \frac{1}{n}$ resp. $-\frac{1}{n}$ resp. $\frac{m}{n}$ (wo m eine positive oder negative ganze Zahl ist), für die endlich der Exponent eine beliebige irrationale Zahl ist. Analog wird man versuchen, die Formel (1) auf die weiteren Potenzbildungen auszudehnen.

Sei erstens der Exponent x von negativ-ganzzahlig, d. h. $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, so wird der Differenzenquotient:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{(x+\Delta x)^n} - \frac{1}{x^n}\right\} \\ &= -\frac{\{(x+\Delta x)^n - x^n\}}{\Delta x}\,\frac{1}{(x+\Delta x)^n x^n}. \end{aligned}$$

Geht man zur Grenze für $\lim \Delta x = 0$ über, so wird der Faktor $\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$ zum Differentialquotienten von x^n, also nach (1) $= nx^{n-1}$, während im Nenner $(x+\Delta x)^n$ gegen x^n konvergiert. Also kommt:

$$(3) \qquad (x^{-n})' = -n \cdot \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Das ist in der That, in Worten ausgedrückt, dasselbe Ergebnis, wie in (1); der Exponent $-n$ ist mit der Potenz von x zu multiplizieren, deren Exponent der um 1 verringerte ursprüngliche Exponent $-n$ ist, nur dass jetzt der Wert $x = 0$ ausgeschlossen werden muss.

Wir gehen über zu $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, wo $\sqrt[n]{x}$ die eine, völlig bestimmte positive n^{te} Wurzel aus der positiven Grösse x darstelle. Wenn aber $y = x^{\frac{1}{n}}$, so ist umgekehrt $x = y^n$; indem man sich also der Regel (B) § 10 für die Umkehrung einer Funktion bedient, erhält man:

$$(4) \quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{n}\frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}$$
$$= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Man erkennt, dass das Endresultat wiederum nach derselben Regel aus $x^{\frac{1}{n}}$ gebildet wird, wie bei (1) und (3).

Daran schliesst sich die Potenzbildung $y = x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$, die nach dem Muster des Falles (3) zu behandeln sein wird. Der Differenzenquotient wird:

$$(5) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}\right\} = -\frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{\Delta x}$$
$$\cdot \frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}}}.$$

Geht man zur Grenze für $\lim \Delta x = 0$ über, so kommt auf Grund von (4):

$$(6)\quad \left(x^{-\frac{1}{n}}\right)' = -\frac{1}{n}\frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{x^{\frac{2}{n}}} = -\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-1} = -\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1},$$

also abermals die alte Regel.

Nunmehr steigt man zu $y = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ auf, wo m und n natürliche Zahlen sind. Die Bildung von $x^{\frac{m}{n}}$ lässt sich in zwei Schritte zerlegen; mittels des Argumentes x stellt man zuerst die Funktion $x^{\frac{1}{n}}$ her, und sodann von dieser Grösse, die als ein neues Argument aufgefasst wird, als Funktion die m^{te} Potenz: $x^{\frac{m}{n}}$ wird daher als „eine Funktion einer Funktion von x“ zu bezeichnen sein. Zweckmässig wird man die „Zwischenfunktion“ oder die „Zwischenvariable“ $x^{\frac{1}{n}}$ durch einen besonderen Buchstaben, etwa u angeben, also setzen:

$$(7)\quad u = x^{\frac{1}{n}},\ y = u^m.$$

Eine Aenderung von x um Δx hat zuvörderst eine Aenderung von u um Δu zur Folge, und diese wiederum eine Aenderung von y um Δy. Man wird somit auch die Bildung des Differenzenquotienten in mehrere Schritte zerlegen, erst $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ herstellen, dann $\frac{\Delta y}{\Delta u}$, und schliesslich $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nun ist sofort ersichtlich, dass:

$$(8)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

mithin durch Grenzübergang für $\lim \Delta x = 0$, also auch $\lim \Delta u = 0$:

$$(I)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Man erkennt dies noch deutlicher, wenn man die Unterschiede zwischen den Differenzenquotienten und den zugehörigen Differentialquotienten in Betracht zieht, also setzt:

$$(9)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \delta, \quad \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du} + \varepsilon, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \eta,$$

wodurch (8) zunächst übergeht in:

$$(10)\qquad \frac{dy}{dx} + \delta = \left(\frac{dy}{du} + \varepsilon\right)\left(\frac{du}{dx} + \eta\right),$$

oder

$$(10a)\qquad \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \varepsilon\frac{du}{dx} + \eta\frac{dy}{du} + \varepsilon\eta - \delta.$$

Da aber mit Δx zugleich δ, ε, η gegen Null konvergieren, und hierbei solche Werte x ausgeschlossen werden, für $\frac{du}{dx}$ oder $\frac{dy}{du}$ unendlich gross werden, so gelangt man*) für $\lim \Delta x = 0$ zu (I).

Offenbar ist der vorgenommene Prozess nicht nur auf das vorliegende Beispiel (7) anwendbar, sondern auf jede Funktion einer Funktion von x, unter Zugrundelegung der in § 10 gegebenen Definition einer Funktion, solange die auftretenden Differentialquotienten als endliche Grössen existieren. Das liefert die fundamentale Regel über die Ableitung der Funktion einer Funktion von x:

---

*) Genauer vollzieht sich der fragliche Grenzprozess in der Art, dass, falls die absoluten Werte von ε, η, $\varepsilon\eta$ bereits unter einer beliebig kleinen, vorgegebenen (positiven) Grösse k liegen, gemäss (8), (9) und (I):

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}\right| < k\left\{\left|\frac{du}{dx}\right| + \left|\frac{dy}{du}\right| + 1\right\}$$

wird, wo unter $\frac{dy}{dx}$ die rechte Seite von (I) zu verstehen ist. Soll also $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}\right|$ unter eine vorgegebene Grenze λ sinken, so wähle man zu dem Behuf

$$k < \frac{\lambda}{\left|\frac{du}{dx}\right| + \left|\frac{dy}{du}\right| + 1}.$$

I „Ist u eine Funktion von x, y eine Fu
tion von u, mithin auch y eine Funktion vo
so wird der Wert des Differentialquotie
$\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt durch das Produkt der bei
einzelnen Differentialquotienten $\frac{dy}{du}, \frac{du}{dx}$: n
träglich ist dann im Resultat u wieder d
seinen Wert in x zu ersetzen."

Im vorliegenden Falle (7) hat man nach (1) und (4

$$\frac{dy}{du} = mu^{m-1} = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} = mx^{\frac{m-1}{n}} = mx^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}, \tag{11}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}, \tag{12}$$

somit nach I:

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}. \tag{13}$$

Eine Kontrolle dieses Ergebnisses bietet sich dar, w
man sich für $x^{\frac{m}{n}}$ der zweiten, oben angegebenen Defini
$(x^m)^{\frac{1}{n}}$ bedient, also setzt:

$$u = x^m, \quad y = u^{\frac{1}{n}}. \tag{14}$$

Dann kommt:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{m}{n}-m}, \tag{15}$$

$$\frac{du}{dx} = mx^{m-1}, \tag{16}$$

also nach I:

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-m} \cdot x^{m-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}, \tag{17}$$

d. i. aber (13), oder die nämliche Regel (1), wie in früheren Fällen.

Auf diesem Wege lässt sich auch der Fall

$$x^{-\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-m}$$

erledigen, wo m, n wieder natürliche Zahlen sind. Man führt die Zwischenfunktion $x^{\frac{1}{n}}$ ein:

$$u = x^{\frac{1}{n}}, \quad y = u^{-m}, \tag{18}$$

und findet nach (3) und (4):

$$\frac{dy}{du} = -mu^{-m-1} = -m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{-m-1} = -mx^{-\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}, \tag{19}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}, \tag{20}$$

somit nach (I):

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^{-\frac{m}{n}}\right)' = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}. \tag{21}$$

Wäre endlich der Exponent ν einer Potenz x^ν eine irrationale Zahl, so lässt sich ν mit jeder beliebigen Genauigkeit durch einen rationalen Bruch $\frac{m}{n}$ angeben, d. h. genauer, zwischen zwei aufeinanderfolgende Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ einschliessen, deren Differenz $\frac{1}{n}$ unter jede Grenze heruntergedrückt werden kann; in § 1 (II) zeigte sich, dass dann $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$, und damit x^ν selbst gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert. Nun ergiebt sich nach (13) resp. (21):

$$(22)\begin{cases} \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = x^{\frac{m}{n}-1}, \\ \left(x^{\frac{m+1}{n}}\right)' = \dfrac{m+1}{n}x^{\frac{m+1}{n}-1} = \dfrac{m+1}{n}x^{\frac{m}{n}-1}x^{\frac{1}{n}} \\ \qquad = \dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}x^{\frac{1}{n}} + \dfrac{1}{n}x^{\frac{m}{n}-1}x^{\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Für $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim x^{\frac{1}{n}} = 1$ (s. § 1, II) konvergieren aber die beiden Ableitungen in (22) gegen den Grenzwert $\nu x^{\nu-1}$.

Damit hat sich die Anfangs ausgesprochene Erwartung betreffs der Verallgemeinerungsfähigkeit der Formel (1) erfüllt und es gilt das Gesetz:

II „Der Differentialquotient einer beliebigen Potenz x^ν $(x \geqq 0)$ wird gebildet, indem man die Potenz $x^{\nu-1}$ mit dem ursprünglichen Exponenten ν multipliziert:

$$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}\text{*}).$$

Hierbei ist nur im Falle eines negativen $\nu - 1$ der Wert $x = 0$ des Argumentes auszuschliessen."

Ist einmal die allgemeinste Potenzbildung x erledigt, so bietet der Prozess der Umkehrung nichts Neues mehr. Denn ist $y = x^\nu$, so wird umgekehrt $x = y^{\frac{1}{\nu}}$, also wieder eine Potenz. In der That kommt nach der Regel § 10 (B) für die Ableitung der Umkehrung einer Funktion:

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\nu x^{\nu-1}} = \frac{1}{\nu} \frac{1}{y^{\frac{\nu-1}{\nu}}} = \frac{1}{\nu} y^{\frac{1}{\nu}-1}, \tag{23}$$

d. i. das nämliche Gesetz wie für x^ν.

Es ist für das Folgende nützlich, das Ergebnis (13) noch auf Grund einer andern Auffassung herzuleiten, die zwar zunächst beschwerlicher ist, dafür indessen einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig ist.

---

*) Wie bei den bisher behandelten elementaren Funktionen lässt sich auch für eine beliebige Potenz x^ν, im Anschluss an § 8, die Stetigkeit, wie der Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient mit elementaren Mitteln abmessen, immerhin ist dieser Weg etwas beschwerlich, und wir werden, wie schon am Ende von § 10 bemerkt, mittels der Taylorschen Reihe und ihres Restgliedes die bez. Fragen bequemer beantworten können (§ 19).

Die Gleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ ist äquivalent mit:

$$y^n = x^m. \tag{24}$$

In (24) lasse man x in $x + \Delta x$, also y in $y + \Delta y$ übergehen:

$$(y + \Delta y)^n = (x + \Delta x)^m. \tag{25}$$

Indem links wie rechts nach dem binomischen Satze (§ 6) entwickelt wird, kommt:

$$y^n + ny^{n-1}\Delta y + (\Delta y)^2\{\,\} = x^m + mx^{m-1}\Delta x + (\Delta x)^2\{\,\}, \tag{26}$$

wo die Faktoren von $(\Delta y)^2$ resp. $(\Delta x)^2$ durch geschweifte Klammern angedeutet sind. Auf Grund von (24) und nach beiderseitiger Division mit Δx entsteht:

$$ny^{n-1}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y\{\,\} = mx^{m-1} + \Delta x\{\,\}, \tag{27}$$

und durch Grenzübergang (vgl. die allgemeinere Erörterung in § 13):

$$\frac{dy}{dx} \cdot ny^{n-1} = mx^{m-1}, \text{ i. e. } y' = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}}. \tag{28}$$

Setzt man rechter Hand für y seinen Wert $x^{\frac{m}{n}}$ ein, so reduziert sich der Wert von y' der Reihe nach auf:

$$y' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}, \tag{29}$$

i. e. (13).

Das vorliegende Beispiel veranlasst, die Funktionsabhängigkeit einer Grösse y von einer andern x analytisch dadurch festzulegen, dass zwischen y und x eine Gleichung besteht, die erlaubt, begrifflich die frühere Definition der Funktion (s. § 10) anzuwenden. Man wird in dieser Gleichung, wie oben bei (25), x und y ersetzen durch $x + \Delta x$ resp. $y + \Delta y$, von der so erhaltenen Gleichung die ursprüngliche abziehen, und dann versuchen, so zur Grenze überzugehen, dass y' berechnet werden kann. Die Ausführung dieser etwas schwierigeren Aufgabe wird in § 13 vorgenommen werden.

§ 12. Der Differentialquotient des Logarithmus und der Exponentialfunktion. Die Entwickelung und der Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Entwickelbarkeit der Exponentialfunktion.

Der Differenzenquotient (§ 8 (IV)) der Exponentialfunktion $y = a^x$, wo unter a eine feste, positive Basis verstanden sei, nimmt die Form an:

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Um hieraus den Differentialquotienten von a^x zu gewinnen, würde die Untersuchung des Grenzwerts von $\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ für $\lim \Delta x = 0$ erforderlich sein. Aus § 1, II weiss man allerdings, dass der Grenzwert von $a^{\Delta x} - 1$ die Null ist, dass somit $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ für $\lim \Delta x = 0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt; im übrigen fehlt aber bis jetzt jedes direkte Mittel, dem fraglichen Grenzwert auf die Spur zu kommen.

Wenn $y = a^x$, so zeigt die Arithmetik, dass x für jeden positiven Wert von y eine völlig bestimmte (reelle) Grösse ist, die man den Logarithmus (mit der Basis a) von y nennt und mit $\overset{a}{\lg} x$ oder kurz, wenn die Kenntnis der Basis a vorausgesetzt wird, mit $\lg x$ bezeichnet. Lässt man y der Reihe nach andere und andere Werte annehmen, so erscheint x im Sinne der Definition des § 10 als die Umkehrung der Exponentialfunktion. Nach § 10 (B) ist dann die Ableitung der Exponentialfunktion das Reziproke von der Ableitung des Logarithmus.

Man wird demgemäss versuchen, um die oben betonte Schwierigkeit zu umgehen, zuerst die Ableitung des Logarithmus zu bilden. Schreibt man vor der Hand wieder $y = \overset{a}{\lg} x = \lg x$, so zeigen die elementaren Eigenschaften des Logarithmus (s. diese Sammlung, Bd. 1, § 32) sofort, dass:

$$(2)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lg(x+\Delta x)-\lg x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\lg\frac{x+\Delta x}{x}=\frac{1}{\Delta x}\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\lg\left\{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}.$$

Um den erforderlichen Grenzprozess für $\lim \Delta x = 0$ vorzunehmen, genügt es offenbar, im Ausdruck $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ unter dem lg-Zeichen auf der letzterhaltenen rechten Seite von (2) die Grösse Δx beliebig abnehmen zu lassen.

Es sei unter x ein beliebig gewählter, aber für die folgende Untersuchung fest gehaltener Wert (>0) verstanden; dann ist klar, dass gleichzeitig mit Δx auch $\frac{\Delta x}{x}$ gegen Null konvergiert.

Die einfachste Art, wie sich eine positive Grösse der Null beliebig nähert, ist in § 1 besprochen, wenn sie nämlich ein Stammbruch $\frac{1}{n}$ ist, wo n eine natürliche, beliebig wachsende Zahl ist. Indem wir uns also vor der Hand auf diesen einfachsten Fall beschränken, also Δx und damit $\frac{\Delta x}{x}$ positiv nehmen und $\frac{\Delta x}{x}$ gleich $\frac{1}{n}$ setzen, wodurch $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ in $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ übergeht, werden wir zu der Hilfsaufgabe geführt, den Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ für ein beliebig wachsendes, zunächst natürliches, n festzustellen.*)

Hier bietet sich als Hilfsmittel der binomische Satz (§ 6) und es kommt:

*) Dass die Existenz eines solchen Grenzwertes mit dem Früheren jedenfalls nicht im Widerspruch stehen würde, sieht man so ein. Wäre e dieser Grenzwert, so müsste sich $\sqrt[n]{e}$ mit wachsendem n dem Werte $1+\frac{1}{n}$, also auch der Einheit selber beliebig nähern: das ist aber gerade der Inhalt des Satzes II von § 1.

$$(3)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{n}+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$
$$+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n}\cdot\frac{1}{k!}$$
$$+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k}{n}\cdot\frac{1}{(k+1)!}$$
$$+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k+1)}{n}\cdot\frac{1}{(k+2)!}+\cdots$$
$$+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-(n-1)}{n}\cdot\frac{1}{n!},$$

oder:

$$(3a)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\cdots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{1}{(k+1)!}$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\frac{1}{(k+2)!}+\cdots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.$$

Man wird zuvörderst versuchen, um sich über den Wert der rechten Seite von (3a) zu orientieren, ihn zwischen zwei möglichst einfach anzugebende Grenzen, also etwa zwischen zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen einzuschliessen. Zu dem Zwecke werde das erste Glied 1 abgespalten und das Aggregat aller darauf folgenden Glieder, das als „Rest R_1" bezeichnet sei, betrachtet. Da alle Glieder dieses Restes R_1, wie unmittelbar ersichtlich, positiv sind, und das erste Glied von R_1 selbst gleich 1 ist, so ist sicher $R_1 > 1$, d. h. 1 ist „eine untere Grenze" von R_1. Um andererseits für R_1 eine einfache „obere Grenze", d. h. eine Zahl, die $> R_1$, zu gewinnen, versuche man, R_1 unter den Wert einer bekannten Reihe, also etwa einer geometrischen Reihe (§ 2, (I) herunterzudrücken. Das geschieht in zwei Schritten. Da alle rechter Hand von (3a) auftretenden Klammerfaktoren:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \ldots, \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

positive echte Brüche sind, so geht aus (3a) die Ungleichung hervor:

$$(4) \qquad R_1 < 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

somit umsomehr, da $3>2$, $4>2$, ..., $n>2$:

$$(5)\ R_1 < 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^k+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

i. e. nach § 2, (I):

$$(5a) \qquad R_1 < \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}},$$

also erst recht:

$$(5b) \qquad R_1 < \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \text{ i. e. } < 2.$$

Damit ist der Wert von R_1 zwischen den Grenzen 1 und 2 eingeschlossen, folglich der Wert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, für jede natürliche Zahl $n(>1)$, zwischen den Grenzen 2 und 3.

Das soeben für die Entwickelung (3) eingeschlagene Verfahren hat man nur in naheliegender Weise zu verallgemeinern, um eine Methode zu erhalten, die überhaupt für Untersuchungen von der Art der hier vorliegenden vorbildlich ist.

Man spalte die rechte Seite in die Summe s_k der ersten k Glieder und den „Rest R_k", d. h. das Aggregat aller noch übrigen Glieder, wobei man sich gleich, im Hinblick auf das weiterhin stets wachsende n, k als eine, n gegenüber verhältnismässig kleine natürliche Zahl denken mag, so dass:

$$(6)\ s_k = 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\ldots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\frac{1}{(k-1)!},$$

$$(7)\quad R_k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[1+\frac{1-\frac{k}{n}}{k+1}+\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{(k+1)(k+2)}+\cdots\right],$$

wo die in der eckigen Klammer hinter dem dritten Gliede noch folgenden Glieder nur durch Punkte angedeutet sind.

Für diese eckige Klammer [ ] in (7) gilt, da wiederum die in den einzelnen Zählern auftretenden Klammerfaktoren positive echte Brüche sind:

$$(8)\quad \left[\ \right] < 1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^{n-k}},$$

womit sie unter den Wert einer geometrischen Reihe heruntergedrückt ist: also entsteht nach § 2, (I):

$$(8a)\qquad \left[\ \right] < \frac{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{n-k+1}}{1-\frac{1}{k+1}},$$

und umsomehr:

$$(8b)\qquad \left[\ \right] < \frac{k+1}{k}.$$

Andererseits ergiebt sich für den vor der eckigen Klammer stehenden Faktor unmittelbar:

$$(9)\qquad \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}.$$

Die Kombinierung von (8b) und (9) lehrt, dass man für den Rest R_k (7) eine einfache, von dem Werte von $n\,(>k)$ ganz unabhängige, obere Grenze gewonnen hat:

$$(10)\qquad R_k < \frac{1}{k!}\,\frac{k+1}{k}.$$

Eine leichte Ausrechnung zeigt, dass man für $k=11$ hat:

$$(11)\qquad R_{11} < 0{,}000000027,$$

d. h. bei Rechnen mit siebenstelligen Dezimalbrüchen kommt der Wert von R_{11} nicht mehr in Betracht, und bei weiterem

Wachsen von k um je eine Einheit würde die Genauigkeit um mindestens je eine weitere Dezimalstelle zunehmen. Und dies gilt ganz unabhängig vom Wachstum von n, wenn n überhaupt nur grösser als die jeweils angenommene Zahl k gewählt wird. Da also R_k bei wachsenden k und $n (> k)$ unter jede Grenze sinkt, so reduziert sich die Entwickelung von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ auf den Wert von s_k (6). Hier kann man offenbar, wenn man sich wiederum für k einen mässig grossen Wert, z. B. $k = 11$, festgehalten denkt, n jederzeit so gross wählen, dass die Brüche $1 - \frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$, $\ldots$ $1 - \frac{k-2}{n}$, und damit auch Produkte von ihnen mit beliebiger Genauigkeit durch die Einheit ersetzbar sind, also auch s_k durch den Wert e_k:

$$(12) \qquad e_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}.$$

Hiermit ist das Ergebnis gewonnen:

„Bei beliebig wachsendem natürlichen n konvergiert $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gegen einen bestimmten Grenzwert e, der durch die unbegrenzte Reihe repräsentiert ist:

$$(13) \quad \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} + \cdots$$

Bricht man die Entwickelung (13) hinter dem k^{ten} Gliede ab, so ist der damit begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{k!} \frac{k+1}{k}$."

Dieser Grenzwert e erweist sich als ein für die ganze Analysis fundamentaler; eine genauere Berechnung (s. u.) liefert den auf 12 Stellen abgerundeten Dezimalbruch:

$$(14) \qquad e = 2{,}718281828459 \ldots$$

Indessen möge die Untersuchung, wennschon sie für praktische Zwecke völlig hinreichen würde, noch etwas feiner ausgestaltet werden, insofern auch der Wert von s_k zwischen zwei Grenzen eingeschlossen werden soll, umsomehr, als das dabei zur Verwendung kommende Hilfsmittel auch später

noch wichtige Dienste leisten wird. Immerhin mag der Leser, dem an einer derartigen Verfeinerung der Methode zunächst weniger gelegen ist, das unmittelbar Folgende überschlagen.

Der in (12) angegebene Wert e_k ist zuvörderst nur eine obere Grenze von s_k. Eine untere Grenze für s_k erhält man, wenn man zunächst im letzten Gliede den Faktor von $\frac{1}{(k-1)!}$, d. i. das Produkt $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)$ durch die ersichtlich kleinere Potenz $\left(1-\frac{k-2}{n}\right)^{k-2}$ ersetzt, weiterhin aber auch die nämliche Ersetzung mit den Faktoren von resp. $\frac{1}{(k-2)!}, \frac{1}{(k-3)!}\cdots, \frac{1}{2!}, \frac{1}{1!}, 1$ vornimmt. Damit wird s_k in den beiden Grenzen eingeschlossen:

$$(15)\quad \left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(k-1)!}\right\}\left(1-\frac{k-2}{n}\right)^{k-2} < s_k$$
$$< \left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{(k-1)!}\right\} \text{ i. e. } e_k\left(1-\frac{k-2}{n}\right)^{k-2} < s_k < e_k.$$

Es soll nunmehr der Fehler ε_k abgeschätzt werden, den man begeht, wenn man, wie es in (12) geschehen, s_k schlechthin durch die rechte Seite e_k der Doppel-Ungleichung (15) ersetzt. Dieser Fehler ε_k ist jedenfalls kleiner als die Differenz der beiden Seiten der Ungleichung (15):

$$(16)\qquad \varepsilon_k < e_k\left\{1-\left(1-\frac{k-2}{n}\right)^{k-2}\right\},$$

also um so mehr, da nach (5b) e_k kleiner als 3 ist:

$$(16a)\qquad \varepsilon_k < 3\left\{1-\left(1-\frac{k-2}{n}\right)^{k-2}\right\}.$$

Der Faktor von 3 rechter Hand von (16a) wird wiederum nach dem binomischen Satze zu entwickeln sein; schreibt man für den Augenblick l statt $k-2$, so kommt:

$$(17)\quad 1-\left(1-\frac{l}{n}\right)^l = \frac{l^2}{n} - \frac{l^2}{n}\cdot\frac{l(l-1)}{n}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{l^2}{n}\cdot\frac{l(l-1)}{n}\cdot\frac{l(l-2)}{n}\cdot\frac{1}{3!}$$
$$- \frac{l^2}{n}\cdot\frac{l(l-1)}{n}\cdot\frac{l(l-2)}{n}\cdot\frac{l(l-3)}{n}\cdot\frac{1}{4!} + -\dots$$

Es sei n bereits grösser als l^2 vorausgesetzt, so ist sofort zu sehen, dass die absoluten Werte der Glieder rechts von (17) Schritt für Schritt (und zwar mit beliebig wachsendem n unbegrenzt) abnehmen; denn da $\frac{l^2}{n} < 1$, so ist erst recht $\frac{l(l-1)}{n} < \frac{l^2}{n} < 1$, $\frac{l(l-2)}{n} < \frac{l(l-1)}{n} < 1$ etc. Bezeichnet man diese absoluten Werte der Kürze halber mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_l$ $(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \ldots)$:

$$(17a)\quad 1 - \left(1 - \frac{l}{n}\right)^l = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 \pm \ldots,$$

so ist die rechte Seite von (17a) sicher kleiner als das erste Glied λ_1, da man sie in die Gestalt setzen kann:

$$(17b)\quad 1 - \left(1 - \frac{l}{n}\right)^l = \lambda_1 - (\lambda_2 - \lambda_3) - (\lambda_4 - \lambda_5) - \ldots,$$

wo alle Klammergrössen*) nach der Voraussetzung:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \ldots$$

positiv sind.

Die linke Seite ist ein positiver Wert, da l^2 kleiner als n gewählt war, also um so mehr $l < n$ ist; für diesen Wert ergiebt sich also, da $\lambda_1 = \frac{l^2}{n}$ ist,

$$(18)\qquad 1 - \left(1 - \frac{l}{n}\right)^l < \frac{l^2}{n} \quad (l^2 < n).$$

Setzt man nunmehr für l wieder seinen Wert $k - 2$ ein, so gilt für den Fehler ε_k (16, 16a):

$$(19)\qquad \varepsilon_k < 3 \cdot \frac{(k-2)^2}{n} \quad \{(k-2)^2 < n\},$$

sodass ε_k bei festgedachtem k und beliebig wachsendem n gegen Null konvergiert.

Wünscht man demnach für irgend einen gegeben gedachten Wert k den Fehler ε_k unter eine gegebene, noch so

*) Das letze Glied rechterhand von (17b) ist entweder die Klammergrösse $-(\lambda_{l-1} - \lambda_l)$ oder aber $-\lambda_l$ selbst, so dass in beiden Fällen die hinter dem negativen Zeichen stehende Grösse positiv ist

kleine (positive) Zahl ε herunterzudrücken, so hat man nur n so hoch zu nehmen, dass $\frac{3(k-2)^2}{n} < \varepsilon$ wird (wobei, sobald nur $\varepsilon < 3$, $(k-2)^2$ von selbst kleiner als n ausfällt), d. h.:

$$n > \frac{3(k-2)^2}{\varepsilon}. \tag{20}$$

Sei etwa $k = 12$, $n = 10 \cdot 000 \cdot 000 \cdot 000$, so wird $\varepsilon_k < \frac{3}{10^8}$, d. h. der Fehler bei Ersetzung von s_k durch e_k (12) beträgt weniger als drei Einheiten der achten Dezimale, kommt also beim Rechnen mit siebenstelligen Dezimalen nicht mehr in Betracht. Gleichzeitig wird gemäss (10) der durch Vernachlässigung des Restes R_{12} erwachsende Fehler $< \frac{3}{10^9}$, ist also unter den vorliegenden Umständen erst recht ohne Einfluss.

Mit Rücksicht auf das Folgende möge aus der Gestalt eines „alternierenden" Aggregates von l Gliedern von der Gestalt der rechten Seite von (17a):

$$\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 \pm \dots \tag{21}$$
$$(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \dots;\ \text{alle } \lambda \text{ positiv})$$

noch eine zweite Folgerung gezogen werden. Schreibt man (21) in der Gestalt:

$$\Lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_3 - \lambda_4) + (\lambda_5 - \lambda_6) + \dots, \tag{21a}$$

wo das letzte Glied entweder die Klammergrösse $+(\lambda_{l-1} - \lambda_l)$ oder aber $+\lambda_l$ ist, also beidemal positiv ausfällt, wie auch alle übrigen Klammergrössen, so geht aus (21a) sofort hervor, dass der Wert des Aggregates Λ den Wert von $\lambda_1 - \lambda_2$ übersteigen muss. Kombiniert man diesen Schluss mit dem oben aus (17b) gezogenen, so erhält man den nützlichen Hülfssatz:

(22) „Versteht man unter $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_1 \dots \lambda_l$ eine Reihe positiver und successive abnehmender Grössen, sodass $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \dots$, so ist der Wert des „alternierenden" Aggregates $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \pm \dots$ selber positiv und zwar zwischen den Grenzen $\lambda_1 - \lambda_2$ und λ_1 enthalten."

Der Satz lässt eine naheliegende Erweiterung zu. Es rde λ_i als ein gerades Glied des Aggregates Λ bezeichnet, nn i eine gerade Zahl, als ein ungerades Glied, falls i eine gerade Zahl bedeutet. Ferner sei unter Λ_i das Aggregat der sten i Glieder von Λ verstanden, mit P_i das der noch übrigen essen absoluter Wert $|P_i|$, je nachdem i gerade oder un- rade, gleich $\pm(\Lambda - \Lambda_i)$ ist].

Wiederholt man den aus (17b) gezogenen Schluss für n ungerades Glied λ_i, andererseits den aus (21a) gezogenen ir das alsdann gerade Glied λ_{i+1}, so ergiebt sich die oppelungleichung $\Lambda_{i+1} < \Lambda < \Lambda_i$, woraus folgt, dass $_i - \Lambda < \Lambda_i - \Lambda_{i+1}$, oder, da $\Lambda_i - \Lambda_{i+1}$ nichts anderes s das Glied λ_{i+1} ist, $\Lambda_i - \Lambda = |P_i| < \lambda_{i+1}$, d. h. bricht an das Aggregat Λ bei einem ungeraden Gliede λ_i ab, so hält man einen zu grossen Wert Λ_i; der Fehler ist kleiner s das nächstfolgende Glied λ_{i+1}.

Ganz analog verfährt man für den Fall, dass λ_i ein ge- ades Glied ist. Man erhält jetzt die umgekehrte Doppel- ngleichung $\Lambda_i < \Lambda < \Lambda_{i+1}$, und hieraus $\Lambda - \Lambda_i < \Lambda_{i+1} - \Lambda_i$ e. $< \lambda_{i+1}$; oder was dasselbe aussagt, $P_i < \lambda_{i+1}$. Damit giebt sich der Satz, der (22) als speziellen Fall $i = 1$ nthält:

(22a) „Bricht man die Reihe $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + - \ldots \pm \lambda_l$, wo alle λ positiv und $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \ldots < \lambda_l$, bei einem i^{ten} Gliede λ_i ab, so ist das Aggregat Λ_i der ersten i Glieder grösser oder kleiner als Λ, je nachdem i ungerade oder gerade ist; der hierbei begangene absolute Fehler, d. h. der absolute Wert des Unterschiedes $\Lambda - \Lambda_i$ ist beidemal kleiner als das dem Gliede λ_i nächstfolgende Glied λ_{i+1}."

Nunmehr kehren wir zu unserem Hauptgegenstand zurück. Es war zunächst die Grösse $\frac{\Delta x}{x}$ in (2) positiv und gleich angesetzt worden.

In zweiter Linie wird zu untersuchen sein, ob und lchen Grenzwert $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ bei abnehmendem Δx erhält,

wenn Δx negativ, und $\frac{\Delta x}{x}$ zunächst wieder gleich $-\frac{1}{n}$ gewählt wird, wo n eine natürliche, beständig wachsende Zahl bedeutet, sodass $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ die Gestalt $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ annimmt.

Man wird zu dem Behuf $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ mit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ vergleichen, und zwar am einfachsten dadurch, dass man den Quotienten bildet:

$$(23)\qquad \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}^{n}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n},$$

und sodann die rechte Seite nach dem binomischen Satze entwickelt:

$$(23\,a)\qquad \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}=1-\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2}\cdot\frac{n-1}{n^2}\frac{1}{2!}+\frac{n}{n^2}\cdot\frac{n-1}{n^2}\cdot\frac{n-2}{n^2}\frac{1}{3!}\pm$$

Hier ist sofort ersichtlich, dass die rechte Seite ein Aggregat von der Art (21) ist: die Glieder haben abwechselndes Vorzeichen und ihre absoluten Werte nehmen Glied für Glied ab. Mithin lässt sich nach (22) der Wert von (23a) für jeden Wert von n (sc. >1) zwischen den beiden Grenzen 1 und $1-\frac{n}{n^2}=1-\frac{1}{n}$ einschliessen:

$$(24)\qquad 1-\frac{1}{n}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}<1,$$

und da die Differenz $\frac{1}{n}$ beider Seiten der Ungleichung mit beliebig wachsendem n unter jede Grenze sinkt, so konvergiert $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}$ gegen Eins, und da der Zähler dieses

Bruches hierbei nach (13) gegen e konvergiert, so ist das nämliche auch mit dem Nenner der Fall:

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e. \tag{25}$$

Aus (25) lässt sich noch eine weitere Folgerung ziehen. Da (25) identisch ist mit $\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$, so entwickele man wieder $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ nach dem binomischen Satze, so kommt im Hinblick auf (3a) sofort:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=1-1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} \tag{26}$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{4!}-+\ldots$$

und, vermöge analoger Überlegungen wie oben beim Uebergang zu (13), falls man n gross genug nimmt, mit beliebig kleinem Fehler:

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-+\ldots \tag{27}$$

Da dies eine alternierende Entwicklung ist, so liefert der Satz (23a):

(28) „Bricht man die rechte Seite von (27) hinter dem Gliede mit dem Nenner $(k-1)!$ ab, so erhält man ein Aggregat, dessen Wert $\gtrless\frac{1}{e}$ ist, je nachdem $k-1$ gerade oder ungerade, d. h. je nachdem k ungerade oder gerade ist: der hierbei begangene Fehler ist, absolut genommen, kleiner als $\frac{1}{k!}$“

Damit ist eine zweite Entwickelung für die Berechnung von e gewonnen, die hinsichtlich ihres Fehlergesetzes ersichtlich einfacher ist, als die erste (13).

Bei der Anwendung ist eine gewisse Vorsicht erforderlich, wenn man von einem mittels (27) berechneten Nähe-

rungswerte von $\frac{1}{e}$ zu einem entsprechenden Näherungswerte von e selbst übergehen will.

Gesetzt man habe für $\frac{1}{e}$ einen zu kleinen Näherungswert r gefunden, mit einem Fehler, von dem man weiss, dass er kleiner als eine Grösse ε ist, so ist:

$$r < \frac{1}{e} < r + \varepsilon. \tag{29}$$

Dann folgt hieraus umgekehrt für e selbst:

$$\frac{1}{r+\varepsilon} < e < \frac{1}{r}. \tag{30}$$

Es ist also $\frac{1}{r}$ ein zu grosser Näherungswert für e; wie lässt sich der zugehörige Fehler η bequem abschätzen?

Man hat unmittelbar:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{r(r+\varepsilon)}. \tag{31}$$

Da der Fehler η unter der Differenz $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\varepsilon}$ der beiden Seiten der Ungleichung (30) liegt, so ist um so mehr:

$$\eta < \frac{\varepsilon}{r^2}.^{*)} \tag{32}$$

Nun ist nach (27) der erste Näherungswert für $\frac{1}{e}$ gleich $\frac{1}{2}$, der zweite gleich $\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$, mithin nach (22) jeder weitere Näherungswert r zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ enthalten: die rechte Seite von (32) wird daher vergrössert, wenn man den

---

*) Entsprechend kommt, wenn s einen zu grossen, $s - \varepsilon$ einen zu kleinen Näherungswert für $\frac{1}{e}$ darstellt: $\eta < \frac{\varepsilon}{(s-\varepsilon)^2}$. Die Untersuchung des Textes gilt offenbar allgemein, wenn man aus einem gefundenen Näherungswert einer Grösse einen solchen für den reziproken Wert der Grösse herleiten will.

Nenner r^2 durch $\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$, und abermals, wenn man ihn durch $\frac{1}{10}$ ersetzt:

(33) $$\eta < 10\,\varepsilon.^*)$$

Für einen zu grossen Näherungswert s von $\frac{1}{e}$ kehrt sich nur die Ungleichung (30) um. Hieraus fliesst die praktische Regel:

(34) „Hat man vermöge (27) einen Näherungswert in Dezimalbruchform für $\frac{1}{e}$ berechnet, der bis auf p Dezimalstellen genau ist, und entwickelt nun das Reziproke dieses Näherungswertes wieder in einen Dezimalbruch, so hat man damit einen Näherungswert für e selbst gewonnen, der sicher bis auf $p-1$ Dezimalstellen genau ist."

Das Umgekehrte gilt natürlich beim Uebergange eines Näherungswertes von e zu einem solchen für $\frac{1}{e}$.

Die in den Formeln (13), (25) niedergelegten Ergebnisse haben gelehrt, dass $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$, wenn $\frac{x}{\Delta x}$ als positive oder negative ganze Zahl unendlich gross wird, gegen ein- und denselben Grenzwert e (13) konvergiert. Nunmehr werde auch diese Beschränkung aufgehoben, und es möge $\frac{x}{\Delta x}$, zunächst wiederum positiv, ganz willkürlich über alle Grenzen wachsen.

Man denke sich während dieses Prozesses irgend einen Wert ω von $\frac{x}{\Delta x}$, der nicht gerade eine natürliche Zahl ist, herausgegriffen; stets ist $\omega=\frac{x}{\Delta x}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n+1$ gelegen. Damit ist:

*) Die genauere Rechnung (s. u.) zeigt, dass bereits von der dritten Stelle von (27) an $\frac{1}{r^2}$ zwischen $7^1/_4$ und $7^1/_2$ liegt, also in (33) *der Faktor 10 durch 7,5 ersetzbar* ist.

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{\omega}<1+\frac{1}{n},$$

also auch nach den Elementen der Potenzlehre (s. diese Sammlung, Bd. 1, § 31):

$$(35)\qquad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(35a)\qquad \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}<\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Nun konvergieren gemäss (13) für ein beliebig wachsendes natürliches n sowohl $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, wie $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ gegen den nämlichen Grenzwert e, anderseits sowohl $1+\frac{1}{n}$, wie $1+\frac{1}{n+1}$ gegen den nämlichen Grenzwert 1, mithin auch $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega$ für ein beliebig wachsendes ω gegen den Grenzwert e. Ein ganz analoger Schluss gilt, falls $\omega=\frac{x}{\Delta x}$ negativ $=-\omega'$, und ω' beliebig unendlich gross wird.

„Damit ist erwiesen, dass die Potenz $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ für irgend einen gegebenen positiven Wert x, falls Δx positiv oder negativ irgendwie gegen Null konvergiert, gegen den bestimmten Grenzwert e (13) konvergiert:

$$(I)\quad \lim_{\Delta x=0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots$$
$$=2{,}718281828459\ldots$$

Damit ist aber auch, sobald der Grenzwert (I) in (2) substituiert wird, der Differentialquotient von $\overset{a}{\lg} x$ ermittelt:

$$(II)\qquad \frac{d\overset{a}{\lg} x}{dx}=(\overset{a}{\lg} x)'=\frac{1}{x}\overset{a}{\lg} e,$$

oder auch, da nach den Elementen der Logarithmenlehre *) (s. die Arithmetik dieser Sammlung, Band 1, § 32):

$$\overset{a}{\lg} e \cdot \overset{e}{\lg} a = 1: \tag{36}$$

$$\frac{d \overset{a}{\lg} x}{dx} = (\overset{a}{\lg} x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\overset{e}{\lg} a}. \tag{IIa}$$

Das liefert auf Grund von § 11 (B) zugleich den Differentialquotienten der Exponentialfunktion a^x:

$$\frac{da^x}{dx} = (a^x)' = a^x \cdot \frac{1}{\overset{a}{\lg} e} = a^x \cdot \overset{e}{\lg} a, \tag{III}$$

wo das Argument x jeden beliebigen, positiven oder negativen Wert (inkl. 0) annehmen darf.

Es ist nützlich, das Charakteristische der Ergebnisse (II) und (III) zu betonen:

„Der Differentialquotient des Logarithmus ist, bis auf einen konstanten Faktor, gleich dem reziproken Wert des Arguments, und der Differentialquotient der Exponentialfunktion, wiederum bis auf einen konstanten Faktor, eben diese Exponentialfunktion selbst."

Die Einführung von $\overset{e}{\lg} a$ statt $\overset{a}{\lg} e$ in (IIa) und (III) bietet den Vorteil, dass nunmehr der im Differentialquotienten von $\overset{e}{\lg} x$ resp. a^x auftretende Logarithmus stets auf ein und dieselbe Basis e bezogen erscheint. Es ist daher nur noch ein weiterer Schritt, wenn man überhaupt in der Analysis den Logarithmen diese Basis e als „Normalbasis" zu Grunde legt; diese Logarithmen führen dann den in der Folge noch mehr gerechtfertigten Namen der „natürlichen", — mit dem abkürzenden Zeichen lx für $\overset{e}{\lg} x$ —, und entsprechend heisst e^x die „natürliche" Exponentialfunktion.

---

*) Nach der Definition des natürlichen Logarithmus ist $a = a^1 = e^{\overset{e}{\lg} a}$, somit $1 = \overset{a}{\lg}\left\{e^{\overset{e}{\lg} a}\right\} = \overset{e}{\lg} a \cdot \overset{a}{\lg} e$.

Dass diese beiden natürlichen Funktionen lx, e^x in der That einfachere Gesetze befolgen, als die allgemeineren $\lg_a x$, a^x, zeigt schon die für $a = e$ eintretende Spezialisierung der Formeln (II a), (III). Denn da $e^1 = e$, d. h. $le = 1$, so kommt:

$$\text{(II')} \qquad \frac{dlx}{dx} = (lx)' = \frac{1}{x},$$

$$\text{(III')} \qquad \frac{de^x}{dx} = (e^x)' = e^x.$$

„Der Differentialquotient des natürlichen Logarithmus ist genau gleich dem reziproken Werte des Arguments, und der Differentialquotient der natürlichen Exponentialfunktion ist genau gleich dieser Exponentialfunktion selbst".

Die Wichtigkeit dieser Resultate wird bald hervortreten. Schon jetzt dürfte aber eine analoge Bemerkung am Platze sein, wie am Ende von § 10; wenn es sich als möglich erweist, den eingeschlagenen Weg rückwärts zu durchlaufen — und das wird eine der Aufgaben der Integralrechnung sein — so wird man auch im Stande sein, im Wesentlichen allein auf Grund der Formel (II'), eine vollständige Theorie der Logarithmen zu entwickeln.

Vergleicht man hinterher das Resultat (II a) mit dem ursprünglichen, zu Beginn dieses Paragraphen gemachten Ansatze (1), so ist eine weitere bemerkenswerte Folgerung gestattet. Denn der dort offen gelassene Grenzwert $\lim_{\Delta x=0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ ist nunmehr mit erledigt; man erhält sofort:

$$\text{(IV)} \qquad \lim_{\Delta x=0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = la. \quad (a \text{ positiv}).$$

Diese merkwürdige Formel — die in § 3 (47) bereits für ein wichtiges Problem der Geometrie, die Quadratur der Hyperbel, herangezogen war — zeigt, dass der Begriff des natürlichen Logarithmus nicht nur, wie es in der Arithmetik geschieht, durch eine Umkehrung der Potenz (genauer gesagt, durch die Umkehrung der Exponentialfunktion) gewonnen werden kann, sondern auch direkt, vermöge eines Grenzprozesses, aus dem Begriff der Exponentialfunktion selbst.

Wegen der Wichtigkeit der Zahl e möge noch auf ihre erische Berechnung näher eingegangen werden. Es mt successive, wenn man die reziproken Werte der ultäten in Dezimalbrüche, die auf 24 Stellen abgerundet , verwandelt*), dies Verfahren bis zu $\frac{1}{24!}$ inkl. fort- t und dann addiert, auf Grund von (13):

$$1+1+\frac{1}{2!}=2{,}5$$

$$\frac{1}{3!}=0{,}166.666.666.666.666.666.666.666.7\ldots$$

$$\frac{1}{4!}=0{,}041.666.666.666.666.666.666.666.7\ldots$$

$$\frac{1}{5!}=0{,}008.333.333.333.333.333.333.333.3\ldots$$

$$\frac{1}{6!}=0{,}001.388.888.888.888.888.888.888.9\ldots$$

$$\frac{1}{7!}=0{,}000.198.412.698.412.698.412.698.4\ldots$$

$$\frac{1}{8!}=0{,}000.024.801.587.301.587.301.587.3\ldots$$

$$\frac{1}{9!}=0{,}000.002.755.731.922.398.589.065.3\ldots$$

$$\frac{1}{10!}=0{,}000.000.275.573.192.239.858.906.5\ldots$$

$$\frac{1}{11!}=0{,}000.000.025.052.108.385.441.718.8\ldots$$

$$\frac{1}{12!}=0{,}000.000.002.087.675.698.786.809.9\ldots$$

$$\frac{1}{13!}=0{,}000.000.000.160.590.438.368.216.1\ldots$$

*) Man entwickelt $\frac{1}{(n+1)!}$, indem man in den genügend weit esetzten Dezimalbruch für $\frac{1}{n!}$ mit $n+1$ hineindividiert.

$$\frac{1}{14!} = 0{,}000.000.000.011.470.745.597.729.7\ldots$$

$$\frac{1}{15!} = 0{,}000.000.000.000.764.716.373.182.0\ldots$$

$$\frac{1}{16!} = 0{,}000.000.000.000.047.794.773.323.9\ldots$$

$$\frac{1}{17!} = 0{,}000.000.000.000.002.811.457.254.3\ldots$$

$$\frac{1}{18!} = 0{,}000.000.000.000.000.156.192.069.7\ldots$$

$$\frac{1}{19!} = 0{,}000.000.000.000.000.008.220.635.2\ldots$$

$$\frac{1}{20!} = 0{,}000.000.000.000.000.000.411.031.8\ldots$$

$$\frac{1}{21!} = 0{,}000.000.000.000.000.000.019.572.9\ldots$$

$$\frac{1}{22!} = 0{,}000.000.000.000.000.000.000.889.7\ldots$$

$$\frac{1}{23!} = 0{,}000.000.000.000.000.000.000.038.7\ldots$$

$$\frac{1}{24!} = 0{,}000.000.000.000.000.000.000.001.6\ldots$$

$$\frac{1}{25!} = 0{,}000.000.000.000.000.000.000.000.1$$

$$e = 2{,}718.281.828.459.045.235.360.287.5\ldots$$

Die Zahl e ist damit auf 24 Dezimalstellen genau berechnet; die 25te Stelle ist in Wirklichkeit, wie die Mitberücksichtigung der folgenden Stellen zeigen würde, um eine halbe Einheit zu erniedrigen. Für den praktischen Gebrauch kann man leicht die ersten 10 Ziffern im Gedächtnis behalten, da auf 2,7 die Ziffern 18 28 18 28 folgen.

Auf Grund des Fehlergesetzes (13) seien noch einige Fehlerabschätzungen vorgenommen, und jeweils mit den Werte (37) für e verglichen.

$k=3$. Bricht man die Reihe (13) beim dritten Gliede ab, so erhält man für e den Näherungswert $e_3 = 1+1+\frac{1}{2!}$ $= 2{,}5$. Der Fehler ist $< \frac{1}{3!}\cdot\frac{4}{3}$ i. e. $< \frac{2}{9} = 0{,}222\ldots$ In Wirklichkeit beträgt er $2{,}718\ldots - 2{,}5 = 0{,}218\ldots$

$k=4$. $e_4 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} = 2{,}6666\ldots$ Der Fehler ist $< \frac{1}{4!}\cdot\frac{5}{4}$ i. e. $< \frac{5}{96} = 0{,}05208\ldots$: in Wirklichkeit $= 0{,}05161\ldots$

$k=5$. $e_5 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} = 2{,}708333\ldots$ Der Fehler ist $< \frac{1}{5!}\cdot\frac{6}{5!}$ i. e. $< \frac{1}{100} = 0{,}01$: in Wirklichkeit $= 0{,}00995\ldots$

$k=6$. $e_6 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} = 2{,}716666\ldots$ Der Fehler ist $< \frac{1}{6!}\cdot\frac{7}{6}$ i. e. $< \frac{7}{4320} = 0{,}00162\ldots$: in Wirklichkeit $= 0{,}00161\ldots$

$k=7$. $e_7 = 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{6!} = 2{,}7180556\ldots$ Der Fehler ist $< \frac{1}{7!}\cdot\frac{8}{7}$ i. e. $< \frac{1}{4410} = 0{,}0002267\ldots$: in Wirklichkeit $0{,}0002262\ldots$

$k=8$. $e_8 = 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{7!} = 2{,}7182540\ldots$ Der Fehler ist $< \frac{1}{8!}\cdot\frac{9}{8}$ i. e. $< 0{,}00002790\ldots$: in Wirklichkeit $= 0{,}000027861\ldots$

$k=9$. $e_9 = 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{8!} = 2{,}718281525583\ldots$ Der Fehler ist $< \frac{1}{9!}\cdot\frac{10}{9}$ i. e. $< 0{,}000000303131\ldots$: in Wirklichkeit $= 0{,}000000302876\ldots$

$k = 10.\ e_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{9!} = 2{,}718281801146\ldots$

Der Fehler ist $< \frac{1}{10!} \cdot \frac{11}{10}$ i. e. $< 0{,}000000027324\ldots$: in Wirklichkeit $= 0{,}000000027313\ldots$*)

Nunmehr werde auch die Berechnung für $\frac{1}{e}$ herangezogen. Auf Grund der Tabelle (37) und (27), (28) erhält man $\frac{1}{e}$ bis auf 24 Dezimalstellen:

$$(38)\quad \frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + - \ldots - \frac{1}{25!} + \frac{1}{26!} - + \ldots$$
$$= 0{,}367.879.441.171.442.321.595.523.8\ldots;$$

die letzte Stelle ist in Wahrheit um 2 bis 3 Einheiten zu erniedrigen.

Um auch für die erforderlichen Fehlerrechnungen mit Hilfe der Formeln (29) bis (34) einige Beispiele durchzuführen, beginnen wir gleich mit dem dritten (zu grossen) Näherungswerte:

$k = 4.\ \frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$ Der Fehler ε ist $< \frac{1}{5!}$ i. e. $< 0{,}00834$: in Wirklichkeit ist er $= 0{,}0071\ldots$ Ein zu kleiner Näherungswert für $\frac{1}{e}$ ist also $r = \frac{3}{8} - \frac{1}{5!} = \frac{11}{30}$. Da nun $\frac{1}{r^2} = \frac{900}{121} = 7{,}44\ldots$ ausfällt, mithin bei allen später folgenden, sowohl zu kleinen wie zu grossen Näherungswerten r noch kleiner als 7,44 wird, so lässt sich in Formel (32)

---

*) Die mitgeteilten Zahlen lassen sofort erkennen, dass der theoretische Fehler $\frac{1}{k!} \cdot \frac{k+1}{k}$ (10) dem wirklichen, R_k (7), verhältnismässig sehr nahe kommt. In der That lehrt eine genauere Untersuchung, dass die Differenz $\frac{1}{k!} \cdot \frac{k+1}{k} - R_k$, indem man sich auf die ersten Glieder beschränkt, für $k \leqq 3$, jedenfalls $< \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{k^3 + k^2 + 2k}$ wird, also umsomehr $< \frac{1}{k!} \frac{1}{k^2 (k+1)}$ und erst recht $< \frac{1}{k!} \frac{1}{k^3}$. Die letzteren beiden Ungleichungen gelten auch noch für $k = 2$.

von jetzt ab $\frac{1}{r^2}$ durch den zu grossen, aber bequemen Wert $7{,}5 = \frac{30}{4}$ ersetzen.

Für den vorliegenden Fall $k = 4$ wird e, als reziproker Wert von $\frac{1}{e}$, näherungsweise $= \frac{8}{3} = 2{,}666\ldots$ Der Fehler ist, nach (32), $< \frac{1}{5!} \cdot 7{,}5$ i. e. $< 0{,}0623$: in Wirklichkeit wird er $0{,}0516\ldots$

$k = 5$. $\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{11}{30} = 0{,}3666\ldots$; Fehler $< \frac{1}{6!}$ i. e. $< 0{,}0014$: in Wirklichkeit $= 0{,}00122\ldots$ Für e als reziproken Wert von $\frac{1}{e}$ käme $e = \frac{30}{11} = 2{,}7273\ldots$; Fehler $< \frac{1}{6!} \cdot 7{,}5$ i. e. $< 0{,}0105$: in Wirklichkeit $= 0{,}0090\ldots$

$k = 6$. $\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{53}{144} = 0{,}368055\ldots$; Fehler $< \frac{1}{7!}$ i. e. $< 0{,}0002$: in Wirklichkeit $= 0{,}00017\ldots$

Hieraus:

$e = \frac{144}{53} = 2{,}716981\ldots$; Fehler $< \frac{1}{7!} \cdot 7{,}5$ i. e. $< 0{,}0015$: in Wirklichkeit $= 0{,}00130\ldots$

$k = 7$. $\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} = \frac{103}{280}$ $= 0{,}367857\ldots$; Fehler $< \frac{1}{8!}$ i. e. $< 0{,}000025\ldots$: in Wirklichkeit $= 0{,}000022\ldots$ Hieraus:

$e = \frac{280}{103} = 2{,}718446\ldots$; Fehler $< \frac{1}{8!} \cdot 7{,}5$ i. e. $< 0{,}00019$: in Wirklichkeit $= 0{,}000164\ldots$

$k = 8$. $\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = \frac{2119}{5760} = 0{,}3678820\ldots$; Fehler $< \frac{1}{9!}$ i. e. $< 0{,}000003$: in Wirklichkeit $= 0{,}0000026\ldots$

$e = \frac{5760}{2119} = 2{,}7182636\ldots$; Fehler $< \frac{1}{9!} \cdot 7{,}5$ i. e. $< 0{,}000023\ldots$: in Wirklichkeit $= 0{,}000018\ldots$

$k=9$. $\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}=\frac{16687}{45360}=0{,}36787919\ldots$;

Fehler $<\frac{1}{10!}$ i.e. $<0{,}0000003\ldots$: in Wirklichkeit $=0{,}00000025\ldots$

$e=\frac{45360}{16687}=2{,}7182837\ldots$; Fehler $<\frac{1}{10!}\cdot 7{,}5$ i. e. $<0{,}00000225$: in Wirklichkeit $=0{,}0000019\ldots$

$k=10$. $\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{49443}{134400}$ $=3{,}367879464\ldots$; Fehler $<\frac{1}{11!}$ i. e. $<0{,}000000025$: in Wirklichkeit $0{,}000000023\ldots$

$e=\frac{134400}{49443}=2{,}718281657\ldots$; Fehler $<\frac{1}{11!}\cdot 7{,}5$ i. e. $<0{,}0000001875$: in Wirklichkeit $=0{,}000000171\ldots$

Zum Schlusse werde darauf hingewiesen, wie die Entwickelungen dieses Paragraphen bei geeigneter Abänderung eine Verallgemeinerung zulassen, die die in § 8 gestellte Aufgabe für die Exponentialfunktion bis zu einem gewissen Grade zu lösen gestattet

Es bedeute x eine positive, im übrigen beliebige Zahlgrösse, so kann man die Entwickelungen (3a), (7) für $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ohne weiteres auf die von $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ übertragen:

(3a′) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)$$
$$+\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left[1+\frac{x}{k+1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{x^2}{(k+1)(k+2)}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)+\ldots\right],$$

wo das Aggregat der ersten k Glieder wieder mit s_k, der Rest mit R_k bezeichnet sei. Für die eckige Klammer [ ] gilt, analog zu (8), (8a), (8b):

(8′) $\left[\quad\right]<1+\frac{x}{k+1}+\left(\frac{x}{k+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{k+1}\right)^{n-k}<\frac{1}{1-\frac{x}{k+1}}$,

sobald $k+1$ den Wert von x überschritten hat, und damit, analog zu (10):

$$R_k < \frac{x^k}{k!} \frac{1}{1-\frac{x}{k+1}} \quad (k+1>x). \tag{10'}$$

Daraus folgert man, dass R_k bei wachsendem k unter jede Grenze sinkt. Denn sei k_1 der erste Wert von k, so, dass $k_1+1>x$, so kann man den Faktor $\frac{x^k}{k!}$ für jeden Wert $k>k_1$ in der Form schreiben:

$$\frac{x^k}{k!} = \left(\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{k_1}\right)\frac{x}{k_1+1}\cdot\frac{x}{k_1+2}\cdots\frac{x}{k}, \tag{38}$$

mithin wird, da $\frac{x}{k_1+1}$ zwischen 0 und 1, und:

$$\frac{x}{k_1+2}<\frac{x}{k_1+1},\ \frac{x}{k_1+3}<\frac{x}{k_1+1}\cdots:$$

$$\frac{x^k}{k!}<\frac{x^{k_1}}{k_1!}\left(\frac{x}{k_1+1}\right)^{k-k_1}, \tag{39}$$

und um so mehr:

$$R_k<\left(\frac{x^{k_1}}{k_1!}\right)\cdot\left(\frac{x}{k_1+1}\right)^{k-k_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{k_1+1}} \quad (k_1+1>x,\ k\geqq k_1). \tag{40}$$

Hier sind rechts der erste und der dritte Faktor für jeden gegebenen Wert von x bestimmte Grössen, während der zweite Faktor für irgend ein beliebig wachsendes k nach § 1, I gegen Null konvergiert.

Andererseits resultiert für s_k, in Analogie zu (12), ohne weiteres die obere Grenze e_k:

$$e_k = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{12'}$$

und wie in (15) lässt sich s_k genauer zwischen den beiden Grenzen einschliessen:

$$e_k\left(1-\frac{k-2}{n}\right)^{k-2}<s_k<e_k, \tag{15'}$$

wo sich für den Unterschied ε_k beider Grenzen, analog zu (19), ergiebt:

$$(19') \quad \varepsilon_k < e_k \frac{(k-2)^2}{n}, \quad \{(k-2)^2 < n,\ k+1 > x\}.$$

Hier ist noch rechts der Faktor e_k selbst durch eine feste obere Grenze ersetzbar; denn wendet man die Ungleichung (40) auf den Fall $k = k_1$ an, so kommt:

$$R_{k_1} < \frac{x^{k_1}}{k_1!} \frac{1}{1-\frac{x}{k_1+1}},$$

somit, als Verallgemeinerung von (5b):

$$(5b') \quad e_k < e_{k_1} + \frac{x^{k_1}}{k_1!} \frac{1}{1-\frac{x}{k_1+1}} \quad (k_1+1 > x,\ k > k_1),$$

wodurch (19') die Gestalt annimmt:

$$(19'') \quad \varepsilon_k < \left\{ e_{k_1} + \frac{x^{k_1}}{k_1!} \frac{1}{1-\frac{x}{k_1+1}} \right\} \frac{(k-2)^2}{n},$$

$$\{(k-2)^2 < n,\ k_1+1 > x,\ k > k_1\},$$

woraus hervorgeht, dass ε_k bei beliebig wachsendem n, für irgend einen fest gedachten Wert von $k\,(> k_1)$ gegen Null konvergiert.

Da sich weiterhin die früheren Entwickelungen für den Fall, dass n nicht bloss als natürliche Zahl, sondern irgendwie, positiv oder negativ, unendlich wird, fast wörtlich auf den vorliegenden Fall $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ übertragen, so hat man als Verallgemeinerung von (I) den Satz:

„Versteht man unter x einen beliebigen, positiven oder negativen Wert, so gilt, wenn n irgendwie unendlich gross wird, die Entwickelung:

$$(V) \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots;$$

bricht man bei positivem x hinter dem k^{ten} Gliede ab — wo k bereits so gross gewählt sei, dass $k+1>x$ ist — so ist der entstehende Fehler sicher kleiner als $\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{k+1}}$. Ist dagegen x negativ, $=-\xi$, so lässt sich diese Fehlerregel noch verschärfen: die Entwickelung (V) ist von einem k_1^{ten} Gliede an, sobald $k_1+1>\xi$, alternierend, und bricht man wiederum hinter einem k^{ten} Gliede ab $(k>k_1)$, so ist der Fehler, absolut genommen, kleiner als der absolute Wert des nächstfolgenden Gliedes, i. e. $<\frac{\xi^k}{k!}$."

Nun ist die linke Seite von (V) einer einfachen Umgestaltung fähig; für $\frac{x}{n}=\frac{1}{y}$, also $n=xy$ wird nämlich:

$$(41)\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{xy}=\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right\}^x \qquad \left(\frac{x}{n}=\frac{1}{y}\right).$$

Lässt man hier, bei einem beliebig gegebenen Werte von x, die Grösse n, und damit zugleich die Grösse y irgendwie unendlich gross werden, so konvergiert nach (I) $\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ gegen e, mithin ist nach den Prinzipien der Potenzlehre: $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ und (V) wird zu:

$$(\text{Va})\qquad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\ldots,$$

und, da $e^{x+h}=e^x\,e^h$, so ergiebt sich als Analogon zu der binomischen Entwickelung (III) (§ 7) einer ganzen Funktion nach steigenden Potenzen von h:

$$(\text{Vb})\quad e^{x+h}=e^x+e^x\cdot\frac{h}{1!}+e^x\cdot\frac{h^2}{2!}+\ldots+e^x\cdot\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}+\ldots,$$

d. i. eine beliebig weit fortsetzbare Entwickelung, deren Fehler beim Abbrechen hinter einem k^{ten} Gliede unmittelbar aus dem in (V) angegebenen, durch Multiplikation mit e^x entsteht.

Aus (Va) und (Vb) lassen sich sofort die entsprechenden Entwickelungen für eine beliebige Exponentialfunktion $a^x (a > 0)$ herleiten. Denn da, nach der Definition eines natürlichen Logarithmus (p. 127, Anmerkung *), eine beliebige positive Grösse b in der Form e^{lb} geschrieben werden kann, so kommt für $b = a^x$:

$$a^x = e^{l(a^x)} = e^{xla}, \tag{42}$$

mithin durch Einsetzung von xla an Stelle von x in (Va):

$$(\text{VIa})\quad a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{x^2(la)^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(la)^{k-1} + \ldots$$

$$(\text{VIb})\quad a^{x+h} = a + a^x\frac{hla}{1!} + a^x\frac{h^2(la)^2}{2!} + \ldots + a^x\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}(la)^{k-1} + \ldots,$$

Entwickelungen, deren Fehlerregeln sich aus den für (Va), (Vb) geltenden ergeben, wenn man das dortige Argument x resp. h mit dem Faktor la versieht.

Auf Grund der Formel (VIa) sind wir im stande, die schon am Ende von § 2 behandelte Abmessung der Stetigkeit der Exponentialfunktion a^x übersichtlicher auszuführen zugleich aber auch die entsprechende Abmessung für die Umkehrung, den Logarithmus.

Nach (1) war für $y = a^x$ die Differenz:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1). \tag{1}$$

Sei zunächst entweder $a > 1$, Δx positiv, oder a zwischen 0 und 1, Δx negativ, also beidemal Δxla positiv, und zwar bereits < 2 vorausgesetzt, so liefert (VIa) bei Anwendung des Fehlergesetzes für $k = 1$, also $k + 1 = 2$:

$$a^{\Delta x} - 1 < \frac{2\Delta xla}{2 - \Delta xla}, \quad (\Delta xla < 2). \tag{43}$$

Soll also Δy (1) unter eine beliebig klein vorgegebene (positive) Grenze η sinken, d. h. $a^{\Delta x} - 1 < \frac{\eta}{a^x}$ werden, so hat man nur Δx so zu wählen, dass:

$$\frac{2\Delta xla}{2 - \Delta xla} < \frac{\eta}{a^x}, \text{ i. e. } |\Delta x| < \frac{1}{|la|} \cdot \frac{\frac{2\eta}{a^x}}{2 + \frac{\eta}{a^x}} \quad (0 < \Delta xla < 2) \tag{44}$$

Sei $\frac{\eta}{a^x}$ bereits $\leqq 2$ gewählt, so genügt es, $\Delta xla < \frac{1}{2}\frac{\eta}{a^x}$ zu wählen, womit die Bedingung $\Delta xla < 2$ von selbst erfüllt ist, da Δxla sogar kleiner als 1 wird.

Ist dagegen a bei positivem Δx zwischen 0 und 1 gelegen, oder aber a bei negativem Δx grösser als 1, somit in beiden Fällen Δxla, wie Δy, negativ, so ist (VIa) für ein negatives Argument heranzuziehen; also wähle man, indem die Entwickelung für a^x hinter dem zweiten Gliede abgebrochen wird:

$$|\Delta xla| < \frac{\eta}{a^x} \quad (|\Delta xla| \leqq 2), \tag{45}$$

um $-\Delta y < \eta$ zu machen; sobald $\frac{\eta}{a^x} < 1$*), ist die Bedingung $|\Delta xla| < 1$ von selbst erfüllt.

Aehnlich lässt sich die Stetigkeit des Logarithmus $x = \overset{a}{\lg} y$ verfolgen. Sei zunächst Δy positiv, also auch Δxla. Da, wie unmittelbar ersichtlich, aus (VIa) folgt:

$$a^{\Delta x} - 1 > \Delta xla \quad (\Delta xla \leqq 2), \tag{46}$$

so ergiebt sich umgekehrt, wenn man noch beiderseits mit $a^x = y$ multipliziert:

$$\Delta xla < \frac{\Delta y}{y} \quad (\Delta xla \leqq 2). \tag{47}$$

Soll also Δy so klein gewählt werden, dass $|\Delta x|$ unter eine vorgegebene (positive) Grenze ε sinkt, so hat man nur:

$$\frac{\Delta y}{|la|y} < \varepsilon, \text{ i. e. } \Delta y < \varepsilon y |la| \tag{48}$$

anzunehmen; sobald ausserdem $\varepsilon|la| \leqq 2$, ist die Bedingung $\Delta xla < 2$ von selbst erfüllt.

Etwas schwieriger ist der zweite Hauptfall: Δy und damit Δxla negativ. Für $|\Delta xla| \leqq 2$ nehmen die Glieder

*) Da Δy negativ ist und a^x nicht negativ werden kann (und für $\lim x = -\infty$ gegen Null konvergiert), so hätte die Annahme $\frac{\eta}{a^x}$ zwischen 1 und 2 keinen Sinn.

der alternierenden Entwickelung (VIa) vom zweiten Gliede an successive ab, es ist somit:

$$(49) \quad 1 - a^{\Delta x} > |\Delta x la| - \frac{1}{2}(\Delta x la)^2 \quad (|\Delta x la| \leqq 2).$$

Um die rechte Seite von (49) zu vereinfachen, bemerke man, dass:

$$(50) \quad |\Delta x la| - \frac{1}{2}(\Delta x la)^2 = \frac{1}{2}|\Delta x la| + \frac{1}{2}|\Delta x la|\{1 - |\Delta x la|\};$$

da hier der Klammerfaktor $1 - |\Delta x la|$, sobald $|\Delta x la| \leqq 1$, nicht negativ sein kann, so gilt:

$$(51) \quad |\Delta x la| - \frac{1}{2}(\Delta x la)^2 \geqq \frac{1}{2}|\Delta x la| \quad (|\Delta x la| \leqq 1),$$

und die Ungleichung (49) lässt sich für die engere Bedingung $|\Delta x la| \leqq 1$ ersetzen durch die einfachere:

$$(52) \quad 1 - a^{\Delta x} > \frac{1}{2}|\Delta x la|, \ \{|\Delta x la| \leqq 1\}.$$

Multipliziert man hier noch beiderseits mit der stets positiven Grösse $y = a^x$, so entsteht wegen $-\Delta y = (1 - a^{\Delta x})y$:

$$(53) \quad |\Delta y| > \frac{1}{2} y\,|\Delta x la|, \ \ |\Delta x la| \leqq 1,$$

oder umgekehrt:

$$(54) \quad |\Delta x| < \frac{1}{|la|}\,\frac{2|\Delta y|}{y}.$$

Soll nunmehr $|\Delta x|$ unter eine vorgegebene Grenze ε sinken, so hat man nur:

$$(55) \quad |\Delta y| < \frac{1}{2} y \varepsilon |la|, \ \ |\Delta x la| \leqq 1$$

zu wählen; die Bedingung $|\Delta x la| < 1$ wird von selbst erfüllt, sobald:

$$(56) \quad \varepsilon < \frac{1}{|la|}$$

angenommen wird; denn dann folgt aus (55):

$$\frac{|\Delta y|}{y} < \frac{1}{2}, \text{ i. e. } e^{|\Delta x la|} < 2, \text{ i. e. } |\Delta x la| < 1.$$

Das Fehlergesetz von (VIa) genügt aber auch, um wiederum die Abnahme des Unterschiedes zwischen Differenzenquotient und Ableitung, sowohl für die Exponentialfunktion, wie für den Logarithmus, messend zu verfolgen.

Für $y = a^x$ ist, nach (1) und (III): $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, $y' = a^x la$, somit, auf Grund von (VIa):

$$(57)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = a^x \left\{ \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} - la \right\} = \frac{a^x}{\Delta x} \left[\frac{1}{2!} (\Delta x la)^2 + \frac{1}{3!} (\Delta x la)^3 + \ldots \right].$$

Für den ersten Hauptfall: $\Delta x la$ und damit auch Δy positiv, ergiebt sich bei Anwendung des Fehlergesetzes für $k = 2$:

$$(58)\quad \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - y' \right| < \frac{a^x}{|\Delta x|} \cdot \frac{(\Delta x la)^2}{2} \cdot \frac{3}{3 - \Delta x la}, \quad (\Delta x la < 3).$$

Soll hier die rechte Seite, und damit auch die linke, unter eine vorgegebene (positive) Grenze η heruntergedrückt werden, so kommt:

$$(59)\quad \Delta x la < \frac{\frac{6\eta}{a^x}}{3|la| + \frac{2\eta}{a^x}}, \quad (\Delta x la < 3).$$

Nimmt man bereits $\frac{2\eta}{a^x} < 3|la|$ an, so wird die rechte Seite von (59) bei Ersetzung von $\frac{2\eta}{a^x}$ durch $3|la|$ verkleinert; wählt man demnach:

$$(60)\quad |\Delta x| < \frac{1}{(la)^2} \frac{\eta}{a^x}, \quad \eta < \frac{3}{2} a^x la,$$

so ist die Bedingung $\Delta x la < 3$ erfüllt, und es wird:

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - y' \right| < \eta.$$

Für den zweiten Hauptfall: Δy, also auch $\Delta x la$ negat kommt:

$$(61) \qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - a^x la\right| < |\Delta x| \frac{a^x (la)^2}{2}, \quad |\Delta x la| < 3;$$

soll also die linke Seite von (61) kleiner als η werden, wähle man:

$$(62) \qquad |\Delta x| < \frac{2\eta}{a^x (la)^2}, \quad \eta < \frac{3}{2} a^x |la|;$$

dann ist von selbst $|\Delta x la| < 3$.

Die nämliche Aufgabe soll auch für $x = \overset{a}{\lg} y$ behan werden; da nach (IIa) $x' = \frac{1}{yla}$, soll also für ein geeig zu wählendes $|\Delta y|$:

$$(63) \qquad \left|\frac{\Delta x}{\Delta y} - \frac{1}{yla}\right| = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - yla\right| \frac{1}{\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| y|la|} < \varepsilon$$

gemacht werden.

Im ersten Hauptfall: Δy und damit $\Delta x la$ positiv, v nach (58) für $k = 2$:

$$(64) \quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - a^x la\right| < \frac{y|\Delta x| (la)^2}{2} \cdot \frac{3}{3 - \Delta x la}, \quad \Delta x la < 3.$$

Setzt man weiter $\Delta x la$ bereits < 1 voraus, so wird Nenner rechter Hand bei Ersetzung von $\Delta x la$ durch 1 kleinert, es ist also um so mehr:

$$(65) \qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - a^x la\right| < \frac{3}{4} y|\Delta x| (la)^2, \quad \Delta x la < 1.$$

Unter der Bedingung $\Delta x la < 1$ ist aber auch si nach (47):

$$(66) \qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| > y|la|;$$

somit lässt sich mit Hilfe von (65) und (66) aus (64) folg dass:

$$(67) \qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - yla\right| \frac{1}{\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|} < \frac{3}{4} \Delta x la < \frac{3}{4} \frac{|\Delta y|}{y}$$

wird, mithin wird die Forderung (63) jedenfalls befriedigt durch:

$$(68) \qquad \Delta y < \frac{4}{3}\varepsilon y^2 |la|, \quad \varepsilon < \frac{3}{4}\frac{1}{y|la|};$$

und da rückwärts hieraus folgt, dass $\frac{\Delta y}{y} < 1$, i. e. $e^{xla} < 2$, so ist damit der Bedingung $\Delta xla < 1$ von selbst genügt.

Wir kommen zum zweiten Hauptfall: Δy, und damit Δxla negativ.

Indem man wieder an (63) anknüpft, berücksichtige man, dass nach (61):

$$(69) \qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - yla\right| < y\frac{|\Delta x|\,(la)^2}{2}, \quad |\Delta xla| < 3,$$

$$(70) \qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| > \frac{y|la|}{2}, \quad |\Delta xla| < 1;$$

es wird also unter der Bedingung $|\Delta xla| < 1$ die Forderung (63) erfüllt werden durch:

$$(71) \qquad |\Delta xla| < \varepsilon y|la|,$$

oder auch mit Rücksicht auf (70):

$$(72) \quad \frac{2|\Delta y|}{y} < \varepsilon y|la| \text{ i. e. } |\Delta y| < \frac{1}{2}\varepsilon y^2|la|, \quad \varepsilon \leqq \frac{1}{y|la|}.$$

Umgekehrt folgt aus (72) unmittelbar $\frac{|\Delta y|}{y} < \frac{1}{2}$, i. e. $1 - e^{-|\Delta xla|} < \frac{1}{2}$, i. e. $e^{|\Delta xla|} < 2$, also $|\Delta xla| < 1$.

Wendet man die vorstehenden Entwickelungen über $y = a^x$ und $x = \lg_a y$ auf alle Werte eines beliebigen Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ von x an und berücksichtigt, dass von allen Werten a^x, falls $a > 1$, a^α der kleinste, a^β der grösste; falls aber a zwischen 0 und 1, a^α der grösste, a^β der kleinste Wert ist, so ergiebt sich, wenn man in den Formeln (44, 45, 48, 55, 60, 62, 68, 72) a^x durch a^α resp. a^β ersetzt:

„Wenn das Argument der Exponentialfunktion resp. des Logarithmus ein beliebiges (sc. im zweiten Falle positives) Intervall durch-

läuft, so lässt sich die absolute Differenz des Arguments so klein (und zwar konstant) wählen, dass die absolute Differenz der Funktion *innerhalb des ganzen Intervalles* unter einer und derselben vorgegebenen, beliebig kleinen Grösse η bleibt. Dasselbe gilt von dem absoluten Unterschiede zwischen Differenzenquotient und Differentialquotient der Funktion."

§ 13. Allgemeine Gesetze über die Bildung von Differentialquotienten zusammengesetzter Ausdrücke.

Im vorhergehenden (§§ 8 bis 12) sind die einfachsten Ausdrücke oder Funktionen von x hinsichtlich der Herstellung des Differentialquotienten untersucht worden. Diese Funktionen verteilen sich, wenn man auf Grund der Regel § 10 (B) je eine Funktion und ihre Umkehrung ein- und derselben Klasse zuweist, auf nur drei Klassen:

a) die Potenzen,
b) die trigonometrischen Funktionen nebst ihren Umkehrungen, den cyklometrischen Funktionen,
c) die logarithmische Funktion, nebst ihrer Umkehrung, der Exponentialfunktion.

Es wird sich nunmehr darum handeln, dies geringfügige Material dadurch auszuwerten, dass man Ausdrücke in Betracht zieht, die aus jenen „Elementarfunktionen" durch bekannte mathematische Operationen erwachsen.

Ein erster, bereits sehr weitgehender Schritt in dieser Richtung war in § 11 (I) gemacht vermöge der „Regel der Funktionen von Funktionen", die der Vollständigkeit halber nochmals aufgezählt sei:

(I) „Ist y eine Funktion von u, u eine Funktion von x, also damit auch y eine Funktion von x, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}."$$

Es ist zweckmässig, dieser Regel noch eine andere Gestalt zu verleihen, die sie besonders für geometrische An-

wendungen geeigneter erscheinen lässt. Ist y eine Funktion von u, u eine Funktion von x, so ist x die inverse Funktion von u, und da nach der Umkehrungsregel § 10 (B) $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$, so schreibt sich (I) auch so:

(I') $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}.$$

(I') „Ist eine funktionale Abhängigkeit zwischen zwei veränderlichen Grössen y und x dadurch festgelegt, dass y und x als Funktionen einer dritten veränderlichen Grösse u gegeben sind, so ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gleich dem Bruche, dessen Zähler der Differentialquotient $\frac{dy}{du}$, dessen Nenner der Differentialquotient $\frac{dx}{du}$ ist. Hierbei sind wieder die Werte von u auszuschliessen, für die der Nenner $\frac{dx}{du}$ verschwindet."

Eine derartige Grösse u heisst ein „Parameter"; in der Geometrie ist es oft ein Hilfswinkel, in der Mechanik die Zeit. Als Beispiel diene der Fall der Ellipse (§ 5 (23)), wo u die excentrische Anomalie ist:

(1) $$x = a\cos u, \quad y = b\sin u,$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos u}{-a\sin u} = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} u.$$

Die Form (I) hat indessen den Vorzug, sich unmittelbar ausdehnen zu lassen auf mehrere Zwischenvariable; ist z. B. y Funktion von u, u von v, v von x, so ist nach (I) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$, mithin:

(Ia) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx},$$

und, allgemein, wie man durch vollständige Induktion sofort erkennt:

(Ib) „Sind zwischen der unabhängigen Variabeln x und der abhängigen y eine Reihe von Zwischenvariabeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ eingeschaltet, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du_1} \cdot \frac{du_1}{du_2} \cdot \frac{du_2}{du_3} \cdots \frac{du_{n-1}}{du_n} \cdot \frac{du_n}{dx}.“$$

Nunmehr mögen auf zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, deren Differentialquotienten $f' = f'(x)$, $g' = g'(x)$ als bekannt vorausgesetzt werden, die Operationen der vier Spezies angewandt werden, d. h. es sollen die Differentialquotienten ihrer Summe, ihrer Differenz, ihres Produktes und ihres Quotienten durch f, g, f' und g' ausgedrückt werden. Die Summe und Differenz von $f(x)$ und $g(x)$, zusammengefasst in $f(x) \pm g(x)$ erledigt sich in einer Zeile. Man hat für den Differenzenquotienten (§ 8 (IV)):

$$\frac{\Delta\{f(x) \pm g(x)\}}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x) - \{f(x) \pm g(x)\}}{\Delta x}$$

(3)
$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

also durch Grenzübergang für $\lim \Delta x = 0$:

(4) $$\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x),$$

oder, falls man den selbstverständlichen Buchstaben x der Kürze halber unterdrückt:

(IIa) $$(f \pm g)' = f' \pm g':$$

„Die Summe resp. Differenz zweier Funktionen von x hat zum Differentialquotienten die Summe resp. Differenz der einzelnen Differentialquotienten.“

Man kann sich hier wieder genauere Rechenschaft davon ablegen, in welcher Weise sich der in (IIa) als ausgeführt betrachtete Differentialquotient von dem zugehörigen Differenzenquotienten (3) unterscheidet.

Es seien die Unterschiede der Differenzenquotienten von f resp. g gegenüber deren Ableitungen mit ε_f resp. ε_g bezeichnet:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f' = \varepsilon_f, \quad \frac{\Delta g}{\Delta x} - g' = \varepsilon_g. \tag{5}$$

Dann nimmt (3) die Gestalt an:

$$\frac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} = f' + \varepsilon_f \pm (g' + \varepsilon_g), \tag{6}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{\Delta(f \pm g)}{\Delta x} - \{f' \pm g'\} = \varepsilon_f \pm \varepsilon_g. \tag{7}$$

Gemäss der Definition des Differentialquotienten (§ 8 (V)) lässt sich der absolute Wert von Δx so klein wählen, dass die absoluten Werte der linken Seiten von (5), d. h. von ε_f und ε_g unter einer beliebig kleinen, (positiven) vorgegebenen Grösse ε liegen. Dann liegt aber der absolute Wert der linken Seite von (7) jedenfalls unter der Grösse 2ε; soll also jener Wert kleiner als eine vorgegebene (positive) Grösse η ausfallen, so hat man nur $\varepsilon < \frac{1}{2}\eta$ zu wählen.

Die Formel (IIa) bietet einen bemerkenswerten Spezialfall, wenn eine der beiden Grössen f, g, z. B. g überhaupt nicht von x abhängt, oder, wie man sagt, eine „Konstante", d. i. ein „konstanter"*) positiver oder negativer Wert c ist; dann fällt

$$g(x) = g(x + \Delta x) = c$$

bereits in (3) ganz heraus, und es kommt unmittelbar:

$$(f + c)' = f'. \tag{8}$$

Es empfiehlt sich jedoch, diesen Spezialfall der Regel (IIa) dadurch unterzuordnen, dass man — in Übereinstimmung mit einer früheren Erscheinung (§ 6 III) — festsetzt:

(9) „Der Differentialquotient nach x einer bezüglich x konstanten Grösse ist Null."

---

*) Damit ist jedoch nur ausgedrückt, dass g „in Bezug auf die Variable x" konstant ist, im Übrigen kann g sehr wohl noch von anderen Variabeln abhängen, vgl. die Anmerkung *) auf p. 61.

Dieser Hilfssatz — dessen Bedeutung erst bei seiner Umkehrung hervortreten wird, die dann eine der Grundlagen der Integralrechnung bildet — lässt sich leicht auch direkt begrifflich deuten. Denn der Differenzenquotient von c hat den Wert Null, gleichgültig wie klein man den Nenner Δx wählen mag, mithin auch der Differentialquotient.

Es kommt jetzt das Produkt fg zweier Funktionen $f(x)$, $g(x)$ an die Reihe. Der Differenzenquotient wird zunächst:

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}. \tag{10}$$

Um hier die Reduktion auf die einzelnen Differenzenquotienten von f, g auszuführen, wird man sich, da der Nenner stets der nämliche, Δx, ist, auf die Zähler beschränken können. Soll nun das zweite Glied des Zählers in (10), $-f(x)g(x)$, zusammen mit einem noch unbekannten einzuschiebenden Gliede, auf den Zähler des Differenzenquotienten, etwa von $g(x)$, zurückkommen, so wird dieses unbekannte Glied ebensowohl den Faktor $g(x+\Delta x)$, wie den Faktor $f(x)$ enthalten, also das Produkt $+f(x)g(x+\Delta x)$ sein müssen. Da sich aber bei dieser Einschiebung nur die Form, nicht aber der Wert des Zählers von (10) ändern darf, so ist das nämliche Hilfsglied noch einmal, mit entgegengesetztem Vorzeichen einzuschalten, wodurch (10) übergeht in:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \qquad (10') \\ &= g(x+\Delta x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Man ersieht daraus, dass mit der vorgenommenen Umänderung zugleich das zweite Ziel erreicht ist, dem ursprünglichen ersten Gliede des Zählers von (10) ein Hilfsglied derart hinzuzufügen, dass die Vereinigung beider gestattet, den Zähler des Differenzenquotienten von $f(x)$ einzuführen. Geht man in (10′) zur Grenze für $\lim \Delta x = 0$ über, so konvergieren die Differenzenquotienten von f, g gegen die bez. *Ableitungen*, $g(x+\Delta x)$ gegen $g(x)$, und es ergiebt sich:

(11) $$\{f(x)g(x)\}' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x),$$

oder wiederum kürzer:

(IIb) $$(fg)' = fg' + gf':$$

„Der Differentialquotient eines Produktes zweier Funktionen von x wird ausgeführt, indem man jede der beiden Funktionen mit dem Differentialquotienten der andern multipliziert, und die Summe beider Produkte bildet."

Da der zur Herleitung von (IIb) eingeschlagene Weg immerhin an einer gewissen Künstlichkeit leidet, so möge noch ein zweites, natürlicher erscheinendes Verfahren dargelegt werden, das überhaupt bei derartigen Fragen von Nutzen ist.

Der ausgesprochenen Absicht gemäss sollen im Zähler von (10) die Zähler der einzelnen Differenzenquotienten von $f(x)$, $g(x)$:

(12) $$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x), \quad \Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$$

eingeführt werden. Umgekehrt ist also:

(13) $$f(x + \Delta x) = f + \Delta f, \quad g(x + \Delta x) = g + \Delta g,$$

und durch Einsetzung dieser Werte von $f(x + \Delta x)$, $g(x + \Delta x)$ in (10) kommt direkt:

(14) $$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{(f + \Delta f)(g + \Delta g) - fg}{\Delta x} = \frac{f\Delta g + g\Delta f + \Delta f \Delta g}{\Delta x}$$
$$= f\frac{\Delta g}{\Delta x} + g\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g,$$

woraus für $\lim \Delta x = 0$, und damit auch $\lim \Delta g = 0$ die Formel (IIb) hervorgeht.

Um diesen Grenzprozess wieder genauer zu verfolgen, führe man in der rechten Seite von (14) die durch (5) erklärten Grössen ε_f, ε_g ein, so wird:

(15) $$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = f(g' + \varepsilon_g) + g(f' + \varepsilon_f) + (f' + \varepsilon_f)\Delta g,$$

oder es wird die zu untersuchende Differenz:

(16) $$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} - (fg' + gf') = f\varepsilon_g + g\varepsilon_f + (f' + \varepsilon_f)\Delta g.$$

Man kann den absoluten Wert von Δx so klein wählen, dass die drei Grössen ε_g, ε_f, Δg, absolut genommen, unter einer und derselben, beliebig klein vorgegebenen (positiven) Grösse ε bleiben, die bereits < 1 angenommen sei: dann ist der absolute Wert der linken Seite von (16) sicher kleiner, als $\varepsilon\{|f| + |g| + |f'| + 1\}$, soll er also kleiner ausfallen, als eine beliebig gewählte (positive) Grösse η, so wird das jedenfalls erreicht, wenn man $\varepsilon < \dfrac{\eta}{|f| + |g| + |f'| + 1}$ macht.

Bemerkenswert ist wiederum der besondere Fall, dass eine der beiden Funktionen f, g, etwa g, eine von x unabhängige Grösse c ist, dann liefert der Ansatz (10) unmittelbar:

$$(cf)' = cf'. \tag{17}$$

Andererseits geht auch (17) vermöge des Hilfssatzes (9) direkt aus (IIb) hervor.

Kombiniert man den Spezialfall (17) mit (IIa), und nennt ein Aggregat von der Form $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$, wo die f Funktionen von x, die c von x unabhängig sind, eine „lineare Kombination" der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, so ergiebt sich sofort:

(18) „Der Differentialquotient einer linearen Kombination von Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ von x ist:

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)' = c_1 f_1' + c_2 f_2' + \cdots + c_n f_n'.\text{“}$$

Sind hier noch spezieller die f Potenzen von x mit natürlichem Exponenten, so kommt man auf die am Ende von § 8 aufgestellte Formel für die Ableitung einer ganzen Funktion von x zurück.

Andererseits lässt sich das allgemeine Gesetz (IIb) ohne Schwierigkeit auf mehr als zwei Funktionen von x, die wiederum mit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bezeichnet seien, ausdehnen. Für $n = 3$ liefert die zweimalige Anwendung von (IIb):

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 f_3)' = \{(f_1 f_2) f_3\}' &= (f_1 f_2) f_3' + f_3 (f_1 f_2)' \\ &= f_1 f_2 f_3' + f_1 f_3 f_2' + f_2 f_3 f_1'.\end{aligned} \tag{19}$$

Für $n = 4$ kommt analog:

$$(20)\quad (f_1f_2f_3f_4)' = \{(f_1f_2f_3)f_4\}' = (f_1f_2f_3)f_4' + f_4(f_1f_2f_3)' = f_1f_2f_3f_4' + f_1f_2f_3'f_4 + f_1f_2'f_3f_4 + f_1'f_2f_3f_4.$$

Hieraus erschliesst man auf dem Wege der vollständigen Induktion, dass allgemein:

$$(21)\quad (f_1f_2\cdots f_{n-1}f_n)' = f_1f_2\cdots f_{n-1}f_n' + f_1f_2\cdots f_{n-1}'f_n + \cdots + f_1'f_2f_3\cdots f_n + f_1f_2\cdots f_n.$$

Denn gesetzt, das Gesetz (21) sei bis zu einem gewissen Wert n richtig, so liefert für den nächstfolgenden Fall $n+1$ die ursprüngliche Regel (IIb):

$$(22)\quad (f_1f_2\cdots f_nf_{n+1})' = \{(f_1f_2\cdots f_n)f_{n+1}\}' = f_1f_2\cdots f_nf_{n+1}' + f_{n+1}(f_1f_2\cdots f_n)'.$$

Setzt man hier rechter Hand für $(f_1f_2\ \ldots\ f_n)'$ seinen Wert aus (21) ein, so ist damit die Richtigkeit von (21) für $n+1$ erwiesen: für $n = 2,\ 3,\ 4$ war aber der Beweis schon im einzelnen geführt. Es gilt demnach:

(IIb') „Der Differentialquotient eines Produktes von Funktionen von x wird ausgeführt, indem man den Differentialquotienten jeder einzelnen der Funktionen mit dem Produkte aller andern Funktionen multipliziert, und dann die Summe aller so entstehenden Produkte bildet (*„Produktregel“*).“

Fallen hier speziell alle Funktionen in eine einzige $f = f(x)$ zusammen, so folgt aus (21) sofort:

$$(23)\quad (f^n)' = nf^{n-1}f'.$$

Das nämliche hätte sich auch auf Grund der Regel (I) der Funktionen von Funktionen ergeben, denn für:

$$y = \{f(x)\}^n = f^n$$

wird:

$$(24)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{df}\cdot\frac{df}{dx} = nf^{n-1}f'.$$

Es erübrigt noch der Fall der vierten Spezies, der Division, von der einzelne Beispiele $\left(\operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x,\ \frac{1}{x^n}\right)$ schon §§ 9, 11 vorkamen; die Behandlung des allgemeinen Falles $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}$ weicht nur wenig davon ab. Es wird:

$$(25)\qquad \frac{\Delta\frac{f}{g}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$
$$= \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x)g(x) - g(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x}.$$

Führt man hier wieder vermöge (13) Δf und Δg ein, so kommt:

$$(26)\qquad \frac{\Delta\frac{f}{g}}{\Delta x} = \frac{1}{g(g+\Delta g)} \cdot \frac{(f+\Delta f)g - (g+\Delta g)f}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{g(g+\Delta g)} \cdot \left(g\frac{\Delta f}{\Delta x} - f\frac{\Delta g}{\Delta x}\right),$$

und der Grenzübergang für $\lim \Delta x = 0$, also auch $\lim \Delta g = 0$ liefert:

$$(\text{IIc})\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}:$$

„Der Differentialquotient eines Bruches $\frac{f(x)}{g(x)}$ wird ausgeführt, indem man das Produkt aus Nenner und Differentialquotient des Zählers vermindert um das Produkt aus Zähler und Differentialquotient des Nenners, und die so gebildete Differenz durch das Quadrat des Nenners dividiert. Hierbei sind wieder solche Werte von x auszuschliessen, für die der Nenner verschwindet (*„Quotientenregel"*).“

Das Gesetz (IIc) lässt sich aber auch direkt aus (IIb) herleiten, wenn man sich des einfachen, aber fruchtbaren Prinzips bedient:

„Zwei übereinstimmende Funktionen von x besitzen auch zwei übereinstimmende Differentialquotienten."

Setzt man nämlich:

$$y = \frac{f}{g}, \text{ i. e. } f = gy, \tag{27}$$

so sind f und gy zwei übereinstimmende Funktionen, und es gilt somit, auf Grund von (IIb):

$$f' = gy' + yg', \tag{28}$$

oder, nach y' aufgelöst, und nach Wiedereinsetzung des Wertes $\frac{f}{g}$ für y:

$$y' = \frac{f' - yg'}{g} = \frac{f' - \frac{fg'}{g}}{g} = \frac{gf' - fg'}{g^2}. \tag{29}$$

Besonders häufig ist der Spezialfall, dass der Zähler f von $\frac{f}{g}$ eine von x unabhängige Grösse c, oder auch gleich der Einheit selbst ist, dann kommt sofort:

$$\left(\frac{c}{g}\right)' = -c\frac{g'}{g^2}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \tag{IIc'}$$

Ein in § 9 direkt behandeltes Beispiel für (IIc) war $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$: da nach § 9 (I), (II) $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = -\sin x$, so wird $gf' - fg' = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, mithin, in Übereinstimmung mit § 9 (III):

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ganz analog erledigt sich $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Wendet man (IIc') auf $g(x) = x^n$ an (wo n eine natürliche Zahl), so hat man ohne weiteres:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1},$$

übereinstimmend mit § 11 (4).

Etwas schwieriger gestaltet sich die theoretische Untersuchung, in welcher Art sich der Grenzübergang von (26) zu (IIc) vollzieht.

Indem man wieder die Grössen (5): $\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'$, $\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{\Delta x} - g'$ in die rechte Seite von (26) einführt, entsteht zunächst:

$$(30)\quad \frac{\Delta\frac{f}{g}}{\Delta x} = \frac{g(f'+\varepsilon_f) - f(g'+\varepsilon_g)}{g(g+\Delta g)} = \frac{gf' - fg'}{g(g+\Delta g)} + \frac{g\varepsilon_f - f\varepsilon_g}{g(g+\Delta g)}.$$

Um hier das erste Glied rechter Hand in zwei Teile zu zerlegen, deren einer die rechte Seite von (IIc), $\frac{gf'-fg'}{g^2}$ ist, vergleiche man den Bruch $\frac{1}{g+\Delta g}$ mit dem Bruche $\frac{1}{g}$, indem man die Differenz bildet:

$$(31)\quad \frac{1}{g} - \frac{1}{g+\Delta g} = \frac{\Delta g}{g(g+\Delta g)};$$

somit lässt sich das erste Glied der rechten Seite von (30) in die Gestalt setzen:

$$(32)\quad \frac{gf'-fg'}{g}\cdot\frac{1}{g+\Delta g} = \frac{gf'-fg'}{g^2} - \frac{\Delta g(gf'-fg')}{g^2(g+\Delta g)},$$

und damit liefert (30), falls man noch auf gemeinsamen Nenner bringt, als Ausdruck für die Differenz von Differenzen- und Differentialquotient von $\frac{f}{g}$:

$$(33)\quad \frac{\Delta\frac{f}{g}}{\Delta x} - \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{\Delta g(fg'-gf') + g(g\varepsilon_f - f\varepsilon_g)}{g^2(g+\Delta g)}.$$

Man darf den absoluten Wert von Δx so klein wählen, dass die absoluten Werte von Δg, ε_f, ε_g unter einer beliebig kleinen, (positiven) vorgegebenen Grösse ε liegen, dann folgt aus (33) die Ungleichung:

$$(34)\quad \left|\frac{\Delta\frac{f}{g}}{\Delta x} - \left(\frac{f}{g}\right)'\right| < \frac{\varepsilon}{g^2|g+\Delta g|}\{|fg'-gf'| + g^2 + |gf|\}.$$

Um Δg aus dem Nenner zu entfernen, soll die rechte Seite von (34) abermals vergrössert werden dadurch, dass $|g+\Delta g|$ in geeigneter Weise verkleinert wird. Wie nahe sich nun auch der Wert von g ($\neq 0$) am Werte Null befinden möge, es wird stets möglich sein, einen beliebig, aber fest gewählten Wert α zwischen g und 0 herauszugreifen, und Δg so zu wählen, dass $|\Delta g|$ nicht nur kleiner als ε, sondern auch kleiner als $|g| - |\alpha|$ ausfällt. Da also dann $|\alpha| < |g| - |\Delta g|$, und $|g| - |\Delta g| \leq |g+\Delta g|$, somit $|\alpha| < |g+\Delta g|$ wird, so ersetze man $|g+\Delta g|$ im Nenner der rechten Seite von (34) durch $|\alpha|$. Am einfachsten wird $\alpha = \frac{g}{2}$ gewählt, dann geht (34) über in:

$$\left|\frac{\frac{\Delta f}{g}}{\Delta x} - \left(\frac{f}{g}\right)'\right| < \frac{2\varepsilon}{g^2|g|}\{|fg' - gf'| + g^2 + |gf|\}. \tag{35}$$

„Daraus geht hervor, dass die linke Seite von (35) unter eine beliebig kleine (positive) vorgegebene Grösse η sinkt, sobald man ε den beiden Bedingungen unterwirft:

$$\varepsilon < \frac{\frac{1}{2}g^2|g|\eta}{|fg' - gf'| + g^2 + |gf|}, \quad \varepsilon < \frac{1}{2}|g|." \tag{36}$$

Den Abschluss der allgemeinen Regeln zur Bildung des Differentialquotienten bildet die Lösung zweier fundamentalen Aufgaben, von denen die eine bereits am Ende von § 11 formuliert war: „Wenn eine funktionale Abhängigkeit zwischen y und x dadurch festgelegt ist, dass zwischen y und x eine Gleichung (Relation) besteht, hieraus den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zu ermitteln, ohne die Gleichung nach y aufzulösen."

Indem man sich in der Gleichung zwischen y und x bereits alle Glieder auf die linke Seite geschafft denkt, kann man sie in der Gestalt ansetzen:

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{37}$$

wo φ ein mathematischer Ausdruck ist, in den ausser festen Zahlwerten resp. ausser Grössen, die von x, y unabhängig sind, zwei veränderliche Grössen x, y eingehen; ein solcher

Ausdruck $\varphi(x, y)$ — wie er im Falle einer ganzen Fun schon in § 8 auftrat — heisst eine „Funktion beiden Variabeln x, y", wenn, wenigstens innerhall wisser Intervalle von x, y jedem Wertepaar x, y ein ein bestimmter Wert von φ zugehört.

Die bisher behandelten Fälle einer Funktion $y =$ ordnen sich unmittelbar dem neuen Ansatze (37) unter, bald sich nämlich der Ausdruck $\varphi(x, y)$ auf $y -$ reduziert.

Für diesen besonderen Fall $\varphi(x, y) = y - f(x)$ man, dass durch (37) die Grösse y als „explizite" („ wickelte") Funktion von x, in jedem anderen Falle gegen, dass y durch (37) als „implizite" („un wickelte") Funktion von x definiert wird.

Um nunmehr die Aufgabe der Differentiation von y n in dem allgemeineren Falle (37) zu lösen, ahme man mögl das Verfahren nach, das ursprünglich (§ 8 (V)) zum Be des Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx}$ führte; nur mit der M fikation, dass alle Formeln jetzt so geschrieben werden, rechter Hand die Null erscheint.

Um also zunächst zum Begriffe des Differenzenquotie zu gelangen, wurde in:

$$y - f(x) = 0 \tag{38}$$

x durch $x + \Delta x$, und damit zugleich y durch $y + \Delta y$ ers

$$y + \Delta y - f(x + \Delta x) = 0; \tag{39}$$

sodann wurde (38) von (39) subtrahiert:

$$\Delta y - \{f(x + \Delta x) - f(x)\} = 0, \tag{40}$$

beiderseits mit Δx dividiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0, \tag{41}$$

und dann zur Grenze $\lim \Delta x = 0$ übergegangen:

$$\frac{dy}{dx} - f'(x) = 0, \quad \text{i. e.} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{42}$$

Analog gehe in (37) x in $x + \Delta x$, y in $y + \Delta y$ i

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0. \tag{43}$$

Man subtrahiere (37) von (43):

$$\varphi(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - \varphi(x,\ y) = 0,$$

ividiere durch Δx:

$$\frac{\varphi(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - \varphi(x,\ y)}{\Delta x} = 0 \tag{45}$$

nd versuche nunmehr, in der linken Seite von (45) so zur Grenze $\lim \Delta x = 0$ überzugehen, dass es gelingt, den gesuchten Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx}$ aus (37), (45) vermöge bekannter Bildungen zu ermitteln.

Nun war oben (10′), bei der Herleitung des Differentialquotienten eines Produktes $f(x)g(x)$ eine ganz ähnliche, nur speziellere Aufgabe aufgetreten, insofern im Differenzenquotienten von $f(x)g(x)$:

$$\frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \tag{46}$$

der Grenzprozess $\lim \Delta x = 0$ vollzogen werden sollte: es geschah das durch Einschaltung der beiden Glieder $\pm g(x + \Delta x)f(x)$ im Zähler von (46). Nach diesem Vorbild wird man im Zähler von (45) die beiden Glieder $\pm \varphi(x, y + \Delta y)$ einschalten [wo also $\varphi(x + \Delta x, y)$ aus dem ursprünglichen Ausdruck $\varphi(x, y)$ dadurch hervorgeht, dass nur x um Δx geändert wird, während y seinen gerade gewählten Wert beibehält], dann nimmt (45) die Gestalt an:

$$\frac{1}{\Delta x}\{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y+\Delta y) + \varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x, y)\} = 0, \tag{47}$$

oder auch, durch eine der damaligen (10′) analoge Zusammenfassung:

$$\frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y+\Delta y)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = 0. \tag{47′}$$

Hier besitzt der erste Quotient linker Hand im wesentlichen die Gestalt des Differenzenquotienten einer Funktion von x, nur mit dem einen Unterschiede, dass ausser der Variabeln x, auf die sich der Prozess der Differenzenbildung bezieht, noch eine variable Grösse $y + \Delta y$ erscheint, die aber

während des in Rede stehenden Prozesses unverändert (konstant) bleibt, also genau dieselbe Rolle spielt, wie jede andere in $\varphi(x,y)$ etwa vorkommende konstante oder von x unabhängige Grösse.

Wenn demnach Δx gegen Null konvergiert, so konvergiert der fragliche Differenzenquotient:

$$\frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y+\Delta y)}{\Delta x}$$

nach der Definition von § 8 (V) gegen den Differentialquotienten von $\varphi(x+\Delta y)$ nach x, und da auch $\lim \Delta y = 0$, gegen den von $\varphi(x,y)$ nach x, der mit $\frac{d\varphi(x,y)}{dx}$ oder kürzer $\frac{d\varphi}{dx}$ zu bezeichnen sein wird.

Das nämliche Verfahren lässt sich bei dem zweiten Quotienten linkerhand von (47′) einschlagen, sobald man noch das bei dem Beweise der Regel der Funktionen von Funktionen (§ 11 (8)) benutzte Hilfsmittel der Erweiterung mit Δy heranzieht, also schreibt:

$$(48)\qquad \frac{\varphi(x,y+\Delta y) - \varphi(x,y)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x,y+\Delta y) - \varphi(x,y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Auf der rechten Seite ist hier der Faktor:

$$\frac{\varphi(x,y+\Delta y) - \varphi(x,y)}{\Delta y}$$

wiederum ein gewöhnlicher Differenzenquotient, nämlich der Funktion $\varphi(x,\ y)$ bez. der unabhängigen Variabeln y, während x jetzt dabei die Rolle einer Konstanten übernimmt.

Lässt man nunmehr Δx gegen Null konvergieren — was in Folge der Abhängigkeit (37) bewirkt, dass zugleich Δy gegen Null konvergiert —, so geht der in Rede stehende Faktor über in $\frac{d\varphi(x,y)}{dy}$ oder kürzer geschrieben $\frac{d\varphi}{dy}$, während der zweite Faktor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in (48) zu dem gesuchten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = y'$ wird.

Somit entsteht durch Grenzübergang aus (47′):

$$(49)\qquad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\, y' = 0,$$

i. e.

$$y' = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}.$$

ls erweist sich als zweckmässig, den Charakter der ntialquotienten $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, in denen je ausser der un-igen Variabeln noch eine zweite Variable auftritt, die ür den jeweiligen Differentiationsprozess unverändert durch geeignete Benennung und Bezeichnung kenntlich chen. Man nennt sie die „partiellen Differential-enten (oder Ableitungen)“ von $\varphi(x, y)$ nach x resp. y Gegensatze dazu den früheren Differentialquotienten len „totalen“ von $f(x)$ nach x — und bedient sich, um llzogenen Grenzprozess anzudeuten, eines nach links ge-ngenen ∂-Zeichens: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, oder auch noch kürzer ichen φ_1, φ_2, dementsprechend, dass x, y auch die resp. zweite Variable heissen. Damit erhält das Er-(49) die Formulierung:

III. „Ist eine funktionale Abhängigkeit einer variablen Grösse y von einer variablen Gröfse x in impliziter Form durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegeben, so erhält man den totalen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = y'$, indem man den partiellen Differential-quotienten von φ nach x: $\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}$ dividiert durch den partiellen Differential-quotienten von φ nach y: $\varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}$ und das negative Vorzeichen hinzufügt.*)

) Die Regel III lässt sich gemäss (49) am leichtesten in der lischen Gestalt $dx\frac{\partial\varphi}{\partial x} + dy\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ merken, deren linke Seite ich mit dx, wie mit einer endlichen Grösse, dividiert denke, ch sie die reale Form (49) annimmt.

Hierbei sind wieder solche Werte von x auszuschliessen, für die vermöge $\varphi(x, y) = 0$ der Nenner $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ verschwindet."

Um den absoluten Wert der Differenz zwischen Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und Differentialquotient y', also nach (49') von $\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, für ein geeignetes Δx unter eine vorgegebene Grösse η herunterzudrücken, gehe man von (47') aus und setze:

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta\varphi(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \varphi_1(x, y+\Delta y) + \varepsilon_1, \\ \dfrac{\Delta\varphi(x, y)}{\Delta y} = \varphi_2(x, y) + \varepsilon_2 = \varphi_2 + \varepsilon_2, \\ \varphi_1(x, y+\Delta y) = \varphi_1(x, y) + \varepsilon_3 = \varphi_1 + \varepsilon_3, \end{cases}$$

dann geht (47') nach Division mit φ_2 über in:

$$(51)\qquad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\varphi_2}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta x}\right),$$

und für

$$(52)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon_4:$$

$$(51')\qquad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\varphi_2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 y' + \varepsilon_2 \varepsilon_4).$$

Man kann Δx so klein gewählt denken, dass ε_1 — und zwar nicht nur für den Wert $y + \Delta y$ des zweiten Arguments, sondern für alle Werte des letzteren zwischen y und $y + \Delta y$ —, zweitens ε_2, und drittens — falls $\varphi_1(x, y)$ als stetige Funktion von y vorausgesetzt wird — auch ε_3 unter ein und derselben beliebig kleinen (positiven) vorgegebenen Grösse δ liegen; endlich kann ε_4, absolut genommen, jedenfalls < 1 angenommen werden.

Geht man sodann in (51) zu den absoluten Werten über, so hat man:

$$(52')\qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right| < \frac{\delta}{|\varphi_2|}\{3 + |y'|\};$$

soll also die rechte Seite, und damit um so mehr die linke unter den Wert η sinken, so genügt es, $\delta < \frac{|\varphi_2|\eta}{3+|y'|}$ zu wählen.

Als Beispiel für die Regel III diene die oben, (1), (2), anders behandelte Mittelpunktsgleichung der Ellipse:

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{53}$$

Hier wird:

$$\varphi_1 \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \varphi_2 \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \tag{54}$$

und somit nach III:

$$y' = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2} \tag{55}$$

in Uebereinstimmung mit (2).

Analog kommt für die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel (§ 5 (26)):

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0: \tag{56}$$

$$y' = +\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}. \tag{57}$$

Der frühere Fall der expliziten Funktion:

$$\varphi(x, y) \equiv y - f(x) = 0$$

liefert $\varphi_1 = -f'(x)$, $\varphi_2 = 1$, also nach III $y' = f'(x)$, wie es sein muss.

Der eben erledigten Aufgabe, den Differentialquotienten einer impliziten Funktion von x zu ermitteln, läuft eine andere, oben schon in Aussicht gestellte, rein äusserlich betrachtet, bis zu einem gewissen Grade parallel, wenn auch der begriffliche Inhalt ein allgemeinerer ist.

Es werde wiederum ausgegangen von einer Funktion $\varphi(x, y)$ von zwei Variabeln x, y, zugleich aber festgesetzt, dass x und y Funktionen einer dritten Variabeln u seien:

$$x = f(u), \quad y = g(u). \tag{58}$$

Denkt man sich diese Werte von x, y in $\varphi(x, y)$ eingesetzt, so wird $\varphi(x, y)$ zu einer Funktion von u allein:

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi\{f(u), g(u)\} \equiv \varphi(u); \tag{59}$$

wie kann man den totalen Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{du}$ auf b kannte Bildungen zurückführen?

Offenbar lässt sich die vorliegende Frage als eine E weiterung der in I gelösten ansehen; wenn nämlich y g nicht von u abhängt, so reduziert sich $\varphi(x, y)$ auf ei Funktion φ von f, wo f eine Funktion von u ist.

Lässt man u in $u + \Delta u$, mithin x in $x + \Delta x$, y $y + \Delta y$ übergehen, so entsteht der Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta u} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta u}, \tag{60}$$

wo der Zähler der rechten Seite ganz mit dem Zähler d linken Seite von (47) übereinstimmt. Indem man sich dab des nämlichen Einschaltungsprozesses bedient, der (47) in d Gestalt (47′) brachte, erhält man:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta u} \equiv \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y+\Delta y) + \varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x,}{\Delta u}$$

$$\equiv \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y+\Delta y)}{\Delta u} + \frac{\varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x,}{\Delta u} \tag{61}$$

Die beiden Brüche rechterhand werden nach dem Vc bild der im zweiten Gliede von (48) vorgenommenen E weiterung umgestaltet, dann kommt:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta u} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\Delta\varphi(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\Delta\varphi(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u}. \tag{62}$$

Nunmehr kann, wie bei (48), der Grenzprozess $\lim \Delta u = 0$ unmittelbar vollzogen werden, und liefert:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{du} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{du}, \tag{63}$$

wo die totalen Differentialquotienten aus (58) zu entnehm sind:

$$(64) \qquad \frac{dx}{du} = \frac{df(u)}{du}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{dg(u)}{du}.$$

Ein besonders häufiger Darstellungsfall von (59) wird der sein, dass die dritte Variable u mit der ersten, x, zusammenfällt:

$$(58') \qquad x = x, \quad y = g(x).$$

Dann ist in (63) $\frac{dx}{du}$ durch $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{dy}{du}$ durch $\frac{dy}{dx} = y'$ zu ersetzen:

$$(63') \qquad \varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y',$$

wo die rechte Seite genau das Aussehen der linken Seite von (49) besitzt.

Ein zweiter wichtiger Darstellungsfall von (59) ist der einer impliziten Abhängigkeit zwischen x und y:

$$(58'') \qquad \psi(x, y) = 0,$$

so dass gemäss (49') für y' erhalten wird:

$$(65) \qquad y' = -\frac{\psi_1}{\psi_2} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}.$$

Setzt man diesen Wert von y' in (63') ein, so hat man als dritte Formel für φ':

$$(63'') \qquad \varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1}{\psi_2}.$$

Man nennt die in der Analysis häufig vorkommende Bildung $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ die „Funktionaldeterminante" der beiden Funktionen $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$.

Die Ergebnisse (63), (63'), (63'') mögen in dem Satze zusammengefasst werden:

> IV. „Wird eine Funktion $\varphi(x, y)$ zweier Variabeln x, y dadurch zu einer Funktion einer *einzigen* Variabeln, dass zwischen x *und* y *eine funktionale* Abhängigkeit besteht,

so sind je nach der äusseren Form die Abhängigkeit:

α) x, y sind explizite Funktionen ei dritten Variabeln u;

β) y ist eine explizite Funktion von x;

γ) y ist eine implizite Funktion von x, d. es besteht eine Relation $\psi(x, y) = 0$

die drei Darstellungsformeln für den tota Differentialquotienten φ' von φ:

$$(\text{IV}\,\alpha)\quad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{du} = \varphi_1 x' + \varphi_2 y',$$

$$(\text{IV}\,\beta)\quad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \varphi_1 + \varphi_2 y',$$

$$(\text{IV}\,\gamma)\quad \varphi' = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}{\psi_2},$$

wo im letzten Falle der Fall $\psi_2 = 0$ aus schliessen ist."

Man beachte hierbei den begrifflichen Unterschied Bildungen $\frac{d\varphi}{dx}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Eine wichtige Anwendung des Satzes IV wird sich i in der Theorie der „Maxima und Minima mit Neb bedingungen" (§ 18) zeigen.

Der Satz IV, insbesondere die Formel (IV α) ist e naheliegenden Verallgemeinerung fähig. Sei eine Funk $\varphi(x, y, z)$ von drei Variabeln x, y, z vorgelegt, die se alle Funktionen einer einzigen Variabeln u seien, so kom

$$(66)\quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta u} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta u}$$

$$= \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta}{\Delta}$$

$$+ \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - \varphi(x+\Delta x, y, z)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$+ \frac{\varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta u}.$$

Lässt man hierin Δu gegen Null konvergieren, so entsteht der gesuchte totale Differentialquotient φ' von φ nach u:

$$(67)\quad \varphi' \equiv \frac{d\varphi}{du} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{du} = \varphi_1 x' + \varphi_2 y' + \varphi_3 z'.$$

Die $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi_1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi_2$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \varphi_3$ sind wiederum partielle Differentialquotienten von $\varphi = \varphi(x, y, z)$ in dem Sinne, dass jeweils immer nur eine der drei Grössen x, y, z als unabhängige Variable fungiert, die beiden andern dagegen als Konstante. Da die Ausdehnung auf mehr als drei Grössen x, y, z ... auf keinerlei Schwierigkeit stösst, so gilt der allgemeine Satz:

> IV'. Wird eine Funktion der Grössen x, y, z, ... dadurch zu einer Funktion einer einzigen Grösse u, dass alle Grössen $x, y, z, \ldots$ als Funktionen von u vorausgesetzt werden, so ergiebt sich der totale Differentialquotient $\varphi' = \frac{d\varphi}{du}$, indem man der Reihe nach jeden der partiellen Differentialquotienten von $\varphi(x, y, z, \ldots)$: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \ldots$ multipliziert mit dem bezüglichen totalen Differentialquotienten $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}, \ldots$, und sodann die Summe dieser Produkte bildet."

§ 14. Übungsbeispiele zu den besonderen und allgemeinen Differentiationsregeln.

Es wird sich empfehlen, vor den theoretischen Anwendungen der bisherigen Entwickelungen auf Analysis und Geometrie die besonderen wie die allgemeinen Regeln für die Differentiation von Funktionen einer unabhängigen Variabeln an einer Reihe von Übungsbeispielen zu erproben. Wir werden uns dabei in der Auswahl der Beispiele davon leiten lassen, solche Funk*tionen zu* bevorzugen, die in den späteren *Anwendungen der Differential-* und Integralrechnung vor-

kommen. Benützt ist die empfehlenswerte Aufgabensammlung von H. Dölp (Giessen, 7. Aufl., 1898, herausgeg. von E. Netto).

A. Differentiation algebraischer Funktionen.

(1) $y = 4ax^5$; $y' = 5 \cdot 4ax^4 = 20ax^4$.

(2) $y = -\frac{5x^3}{a}$; $y' = -\frac{3 \cdot 5x^2}{a} = -\frac{15x^2}{a}$.

(3) $y = \frac{a}{x^4} = ax^{-4}$; $y' = -4ax^{-5} = -\frac{4a}{x^5}$.

(4) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(5) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$; $y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$; $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

(7) $y = x^3\sqrt{x} = x^{\frac{7}{2}}$; $y' = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$.

(8) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{7}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{7}{3}} = x^{-\frac{11}{6}}$;

$y' = -\frac{11}{6}x^{-\frac{11}{6}-1} = -\frac{11}{6}x^{-\frac{17}{6}} = -\frac{11}{6}\frac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}} = -\frac{11}{6}\frac{1}{x^2\sqrt[6]{x^5}}$.

(9) $y = x\sqrt{x\sqrt{x}} = x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = x \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{7}{4}}$;

$y' = \frac{7}{4}x^{\frac{7}{4}-1} = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$.

Für diese Beispiele reicht die Benutzung der allgemeinen Potenzregel $(x^n)' = nx^{n-1}$ (§ 11, Formel (II)), aus, da konstante Faktoren nach der speziellen Produktregel (§ 13, Formel (17)) als solche zu belassen sind. Für die nächst-

folgenden Beispiele ist es zweckmässig resp. notwendig, sich der Regel der Funktionen von Funktionen (§ 11, Formel (I)), zu bedienen.

(10) $y = (a - bx)^3$, also $y = u^3$, $u = a - bx$, $\frac{dy}{du} = 3u^2$, $\frac{du}{dx} = -b$;

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2(-b) = -3b(a - bx)^2.$$

Eine Kontrolle ergiebt sich nach dem binomischen Satze (§ 6) und der Regel für ganze Funktionen (§ 8, Ende):

$$y = (a - bx)^3 = a^3 - 3a^2bx + 3ab^2x^2 - b^3x^3;$$
$$y' = -3a^2b + 2 \cdot 3ab^2x - 3b^3x^2$$
$$= -3b(a^2 - 2abx + b^2x^2) = -3b(a - bx)^2.$$

(11) $y = \left(a - \frac{1}{x}\right)^3$; $y = u^3$, $u = a - \frac{1}{x}$, $\frac{dy}{du} = 3u^2$, $\frac{du}{dx} = +\frac{1}{x^2}$;

$$y' = 3\left(a - \frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{x^2} = \frac{3(ax - 1)^2}{x^4}.$$

(12) $y = \frac{1}{a + bx}$; $y = \frac{1}{u}$, $u = a + bx$, $\frac{dy}{du} = -\frac{1}{u^2}$, $\frac{du}{dx} = b$;

$$y' = -\frac{1}{(a + bx)^2} \cdot b = -\frac{b}{(a + bx)^2}.$$

(13) $y = \sqrt{a + bx}$; $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$, $u = a + bx$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ (s. (4)), $\frac{du}{dx} = b$;

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a + bx}} \cdot b = \frac{b}{2\sqrt{a + bx}}.$$

(14) $y = \sqrt{2px}$; $y = \sqrt{u}$, $u = 2px$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $\frac{du}{dx} = 2p$;

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2px}} \cdot 2p = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

(15) $y = \frac{1}{\sqrt{a-bx}}$; $y = u^{-\frac{1}{2}}$, $u = a - bx$, $\frac{dy}{du} = -\frac{1}{2\sqrt{u^3}}$ (s.(6)),

$$\frac{du}{dx} = -b;$$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{(a-bx)^3}} \cdot (-b) = \frac{b}{2\sqrt{(a-bx)^3}}.$$

(16) $y = \sqrt{a-bx^2}$; $y = \sqrt{u}$, $u = a - bx^2$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $\frac{du}{dx} = -2bx$;

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a-bx^2}} \cdot (-2bx) = -\frac{bx}{\sqrt{a-bx^2}}.$$

Analog hat man:

(16a) $y = \sqrt{a^2+x^2}$; $y' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(17a) $y = \sqrt{a+x}$; $y = \sqrt{u}$, $u = a + x$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $\frac{du}{dx} = 1$;

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a+x}}.$$

(17b) $y = \sqrt{a-x}$; $y = \sqrt{u}$, $u = a - x$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $\frac{du}{dx} = -1$;

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{a-x}}.$$

Mithin kommt durch Zusammensetzung von (17a) und (17b) gemäss der Summenregel (§ 13, Formel (IIa)):

(17) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$; $y' = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{a+x}} - \frac{1}{\sqrt{a-x}}\right\}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x}}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Mittels Hinzunahme der Produkt- und Quotienten-Regel (§ 13, Formeln (IIb), (IIc)) erledigen sich die nächstfolgenden Beispiele:

(18) $y = (a+x)\sqrt{a-x} = f(x)\cdot g(x)$;

$$f' = 1,\ g' = -\frac{1}{2\sqrt{a-x}}\ \text{(s. Nr. 17b))};$$

$$y' = fg' + gf' = (a+x)\cdot -\frac{1}{2\sqrt{a-x}} + 1\cdot\sqrt{a-x}$$

$$= \frac{-(a+x)+2(a-x)}{2\sqrt{a-x}} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}.$$

(19) $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2+x^2};\quad f = \frac{a}{x},\ g = \sqrt{a^2+x^2},\ f' = -\frac{a}{x^2},$

$$g' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\ \text{(s. (16a))};$$

$$y' = \frac{a}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \sqrt{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{x^2} = \frac{ax^2 - a(a^2+x^2)}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= -\frac{a^3}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

(20) $y = \frac{1-x}{1+x} = \frac{f}{g};\quad f' = -1,\ g' = +1;$

$$y' = \frac{gf' - fg'}{g^2} = \frac{(1+x)\cdot(-1) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}.$$

(21) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{f}{g};\quad f' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ g' = -\frac{1}{2\sqrt{x}};$

$$y' = \frac{(1-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - (1+\sqrt{x})\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2}.$$

(22) $y = \sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}} = \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{a-bx}} = \frac{f}{g};\quad f' = \frac{b}{2\sqrt{a+bx}},$

$$g' = -\frac{b}{2\sqrt{a-bx}};$$

$$y' = \left\{\sqrt{a-bx}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a+bx}} + \sqrt{a+bx}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a-bx}}\right\}\frac{1}{a-bx}$$

$$= \frac{2ab}{2\sqrt{a^2-b^2x^2}}\cdot\frac{1}{a-bx} = \frac{ab}{(a-bx)^2}\sqrt{\frac{a-bx}{a+bx}}.$$

B. Trigonometrische und cyklometrische Funktionen (§ 9, Formeln (I)—(IV); § 10, Formeln (I)—(IV)).

(23) $y = \sin(x^n)$; $y = \sin u$, $u = x^n$, $\frac{dy}{du} = \cos u$, $\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$;

$y' = \cos(x^n)\cdot nx^{n-1}$.

(24) $y = \sin^2 x$; $y = u^2$, $u = \sin x$, $\frac{dy}{du} = 2u$, $\frac{du}{dx} = \cos x$;

$y' = 2\sin x\cos x = \sin(2x)$.

(25) $y = \frac{1}{(\cos x)^n}$; $y = u^{-n}$, $u = \cos x$, $\frac{dy}{du} = -nu^{-n-1}$,

$\frac{du}{dx} = -\sin x$;

$y' = \frac{n\sin x}{\cos^{n+1} x}$.

(26) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$;

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$= \frac{4}{(2\sin x\cos x)^2} = \left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2.$$

(27) $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$;

$y' = 3\cos x - 3\cdot 4\sin^2 x\cos x = 3\cos x(1 - 4\sin^2 x)$.

Nach der Trigonometrie (s. diese Sammlung, Bd. III, § 46, (7)), ist $\cos x(1 - 4\sin^2 x) = \cos 3x$, denn man hat $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = \cos x(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin^2 x\cos x = \cos x(1 - 4\sin^2 x)$. Somit wird: $y' = 3\cos 3x$. In der That ist (l. c.) $y = \sin 3x$.

8) $y=(x\operatorname{tg}x)^2$; $y=u^2$, $u=x\operatorname{tg}x$, $\dfrac{dy}{du}=2u$,

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{\cos^2 x}+\operatorname{tg}x=\frac{x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2x+\sin 2x}{2\cos^2 x};$$

$$y'=x\operatorname{tg}x\cdot\frac{2x+\sin 2x}{\cos^2 x}.$$

9) $y=\dfrac{a-b\cos x}{a+b\cos x}=\dfrac{f}{g}$, $f'=b\sin x$, $g'=-b\sin x$;

$$y'=\frac{b\sin x}{(a+b\cos x)^2}\Big\{(a+b\cos x)\cdot 1-(a-b\cos x)\cdot(-1)\Big\}$$

$$=\frac{2ab\sin x}{(a+b\cos x)^2}.$$

10) $y=\sin x-x\cos x$; $y'=\cos x-\{-x\sin x+\cos x\}$

$$=x\sin x.$$

11) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$; $y=\arcsin u$, $u=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$,

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x^2};$$

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

12) $y=\arcsin\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\arcsin u$, $u=\dfrac{f}{g}=\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$,

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)^2}}$$

$$=\frac{a^2+x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^2-(a^2-x^2)^2}}=\frac{a^2+x^2}{\sqrt{4a^2x^2}}$$

$$=\frac{a^2+x^2}{2ax},\quad \frac{du}{dx}=\frac{(a^2+x^2)(-2x)-(a^2-x^2)2x}{(a^2+x^2)^2}$$

$$=-\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2};$$

$$y' = -\frac{a^2+x^2}{2ax}\cdot\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{2a}{a^2+x^2}.$$

(33) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arcsin u, \quad u = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{v},$
$v = 1-x^2;$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{dv}{dx} = -2x;$$

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(34) $y = \arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} = \arccos u, \quad u = \frac{f}{g} = \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x};$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)^2}}$$

$$= -\frac{a+b\cos x}{\sqrt{(a+b\cos x)^2-(b+a\cos x)^2}}$$

$$= -\frac{a+b\cos x}{\sqrt{a^2-b^2-\cos^2 x\,(a^2-b^2)}}$$

$$= -\frac{a+b\cos x}{\sin x\sqrt{a^2-b^2}},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(a+b\cos x)(-a\sin x)-(b+a\cos x)(-b\sin x)}{(a+b\cos x)^2}$$

$$= -\frac{\sin x\,(a^2-b^2)}{(a+b\cos x)^2};$$

$$y' = -\frac{a+b\cos x}{\sin x\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{(-\sin x)(a^2-b^2)}{(a+b\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}.$$

5) $y = \arccos\frac{a-x}{x} = \arccos u, \quad u = \frac{f}{g} = \frac{a-x}{x};$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(a-x)^2}{x^2}}}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{2ax-a^2}},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x(-1)-(a-x)}{x^2} = -\frac{a}{x^2};$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{2ax-a^2}} \cdot -\frac{a}{x^2} = \frac{a}{x\sqrt{2ax-a^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{2x-a}}.$$

6) $y = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin u, \quad u = x\sqrt{\frac{b}{a}};$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\frac{b}{a}}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}, \quad \frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{b}{a}};$$

$$y' = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}.$$

7) $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin u, \quad u = \frac{f}{g} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2-x^2}} = \sqrt{1+x^2},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot 1 - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}};$$

$$y' = \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(38) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \operatorname{arctg} u, \quad u = \sqrt{v},$

$$v = \frac{f}{g} = \frac{1-x}{1+x};$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{1+x}{1+x+1-x} = \frac{1+x}{2},$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(1+x)(-1)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

$$y' = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot -\frac{2}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

(39) $y = \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccotg} u, \quad u = \frac{f}{g} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{1+u^2} = -\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = -(1-x^2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot 1 - \frac{x(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}};$$

$$y' = -(1-x^2)\cdot\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(40) $$y = \operatorname{arccotg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \operatorname{arccotg} u,$$

$$u = \frac{f}{g} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x};$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{1+u^2} = -\frac{1}{1+\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}}$$

$$= -\frac{x^2}{x^2+(1+x^2)+1-2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{x^2}{2(1+x^2-\sqrt{1+x^2})}$$

$$= -\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - (\sqrt{1+x^2}-1)\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x^2-(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}},$$

$$y' = -\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

(41) $$y = \operatorname{arccotg}\frac{1}{\sqrt{x}} = \operatorname{arccotg} u, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{1+u^2} = -\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{x}{1+x},$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}};$$

$$y' = -\frac{x}{1+x} \cdot -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

(42) $y = a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x}} = a \operatorname{arctg} u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = \frac{a-x}{x};$

$$\frac{dy}{du} = a \cdot \frac{1}{1+u^2} = a \cdot \frac{1}{1+\frac{a-x}{x}} = \frac{ax}{x+a-x} = x,$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a-x}{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{a-x}},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x(-1)-(a-x)}{x^2} = -\frac{a}{x^2};$$

$$y' = x \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{a-x}} \cdot -\frac{a}{x^2} = -\frac{a}{2\sqrt{x}\sqrt{a-x}}$$

$$= -\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}.$$

Kombiniert man dies Ergebnis mit dem Differentialquotienten von $\sqrt{ax-x^2}$, nämlich $(\sqrt{ax-x^2})' = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$, so erledigt sich auch die Differentiation von:

(43) $y = \sqrt{ax-x^2} - a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x}};$

$$y' = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} + \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} = \frac{2a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= \frac{a-x}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

C. Exponential- und logarithmische Funktionen (s. § 12, Formel (II), (III)).

(44) $y = e^{ax} = e^u$, $u = ax$; $\frac{dy}{du} = e^u = e^{ax}$, $\frac{du}{dx} = a$;

$y' = ae^{ax}$.

(45) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $y'' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$.

(46) $y = e^x(x-1) = fg$; $f' = e^x$, $g' = 1$;

$y' = fg' + gf' = e^x \cdot 1 + (x-1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$.

(47) $y = \frac{e^x}{x^n} = \frac{f}{g}$; $f' = e^x$, $g' = nx^{n-1}$;

$$y' = \frac{gf' - fg'}{g^2} = \frac{x^n \cdot e^x - e^x \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{e^x x^{n-1}(x-n)}{x^{2n}} = \frac{e^x(x-n)}{x^{n+1}}.$$

(48) $y = \sqrt{e^{ax}} = \sqrt{u}$; $u = e^{ax}$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{ax}}}$,

$\frac{du}{dx} = ae^{ax}$ (s. (44));

$y' = \frac{1}{2\sqrt{e^{ax}}} \cdot ae^{ax} = \frac{a}{2}\sqrt{e^{ax}}$.

(49) $y = a^{\operatorname{tg} x} = a^u$; $u = \operatorname{tg} x$, $\frac{dy}{du} = a^u la = a^{\operatorname{tg} x} la$,

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$y' = a^{\operatorname{tg} x} la \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

(50) $y = l(a-x) = lu$; $u = a - x$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{a-x}$,

$\frac{du}{dx} = -1$;

$y' = \frac{1}{a-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-a}$.

(51) $y = l(x^n) = n l x; \quad y' = \frac{n}{x}.$

(52) $y = l\frac{1}{x} = -lx; \quad y' = -\frac{1}{x}.$

(53) $y = l\frac{a}{a+x} = lu; \quad u = \frac{a}{a+x} = \frac{a}{v}, \quad v = a + x.$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{a+x}{a}, \quad \frac{du}{dv} = -\frac{a}{v^2} = -\frac{a}{(a+x)^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = 1;$$

$$y' = \frac{a+x}{a} \cdot -\frac{a}{(a+x)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{a+x}.$$

(54) $y = l\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = lu; \quad u = x + \sqrt{1+x^2};$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \text{ (s. (16a))} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(55) $y = l\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = lu, \quad u = \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{f}{g};$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\frac{du}{dx} = \left\{\frac{x(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} - \left(a + \sqrt{a^2 - x^2}\right) \cdot 1\right\} \frac{1}{x^2} \text{ (s. (16))}$$

$$= \frac{-x^2 - a\sqrt{a^2 - x^2} - (a^2 - x^2)}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{-a\sqrt{a^2 - x^2} - a^2}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{a\left(a + \sqrt{a^2 - x^2}\right)}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$y' = \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \cdot -\frac{a(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= -\frac{a}{x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Ganz analog erledigt sich:

(56) $$y = l\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x} = lu; \quad \frac{dy}{du} = \frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\frac{du}{dx} = \left\{x \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - (a+\sqrt{a^2+x^2}) \cdot 1\right\} \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - a\sqrt{a^2+x^2} - (a^2+x^2)}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= -a \cdot \frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x^2\sqrt{a^2+x^2}};$$

$$y' = \frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot (-a) \cdot \frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= -\frac{a}{x\sqrt{a^2+x^2}}.$$

(57) $$y = l\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = lu; \quad u = \frac{1}{\sqrt{v}} = v^{-\frac{1}{2}}, \quad v = 1+x^2;$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \sqrt{1+x^2}, \quad \frac{du}{dv} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \quad \frac{dv}{dx} = 2x;$$

$$y' = \sqrt{1+x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot 2x = -\frac{x}{1+x^2}.$$

(58) $$y = l\frac{1+x}{1-x} = lu; \quad u = \frac{1+x}{1-x} = \frac{f}{g},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1-x}{1+x},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-x)\,1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2};$$

$$y' = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}.$$

(59) $$y = l\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = lu, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = \frac{a+x}{a-x} = \frac{f}{g};$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, \quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(a-x)\cdot 1 - (a+x)(-1)}{(a-x)^2} = \frac{2a}{(a-x)^2};$$

$$y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \cdot \frac{2a}{(a-x)^2} = \frac{a(a-x)}{(a+x)(a-x)^2}$$

$$= \frac{a}{(a+x)(a-x)} = \frac{a}{a^2-x^2}.$$

(60) $$y = l\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = lu; \quad u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{f}{g},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot 1 - \frac{x(-x)}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$= \frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)};$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{1}{x(1-x^2)}.$$

(61) $$y = \frac{1}{x}lx = \frac{f}{g}; \quad y' = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - lx\cdot 1}{x^2} = \frac{1-lx}{x^2}.$$

(62) $$y = l(a+x+\sqrt{2ax+x^2}) = lu;$$

$$u = a+x+\sqrt{2ax+x^2},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}},$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{2a+2x}{2\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{\sqrt{2ax+x^2}+a+x}{\sqrt{2ax+x^2}};$$

$$y' = \frac{1}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}} \cdot \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{\sqrt{2ax+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}.$$

(63) $$y = \frac{m}{2} l(x^2-a^2) + \frac{n}{2a} l\frac{x-a}{x+a};$$

$$y' = \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{x^2-a^2} \cdot 2x + \frac{n}{2a} \cdot \frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{(x+a)\cdot 1 - (x-a)\cdot 1}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{mx}{x^2-a^2} + \frac{n}{(x-a)(x+a)} = \frac{mx+n}{x^2-a^2}.$$

(64) $$y = l(x-1) + 3l(x+1) + l(x^2+1) + 5 \operatorname{arctg} x;$$

$$y' = \frac{1}{x-1} \cdot 1 + \frac{3}{x+1} \cdot 1 + \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x + \frac{5}{x^2+1}$$

$$= \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{3(x-1)}{x^2-1} + \frac{2x+5}{x^2+1} = \frac{4x-2}{x^2-1} + \frac{2x+5}{x^2+1}$$

$$= \frac{(4x-2)(x^2+1) + (2x+5)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{6x^3+3x^2+2x-7}{x^4-1}.$$

(65) $$y = \frac{1}{\sqrt{a}} l\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} lu;$$

$$u = \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} = \frac{f}{g},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a+bx}} - \{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}\} \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}}{\{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\}^2}$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{a+bx}} \cdot 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\}^2};$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}} \cdot \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a+bx}} \cdot \frac{b}{\{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\}^2}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a+bx}} \cdot \frac{1}{\{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}\}\{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\}}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a+bx}\,(a+bx-a)} = \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}.$$

(66) $y = l \sin x = lu,\ u = \sin x;\ \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sin x},\ \frac{du}{dx} = \cos x;$

$y' = \operatorname{cotg} x.$

(67) $y = l \cos x;\quad y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x.$

(68) $y = l \operatorname{tg} x;\quad y' = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$

(69) $y = l \operatorname{cotg} x;$

$$y' = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

Dies Ergebnis fliesst auch unmittelbar aus (68), da

$$l \operatorname{cotg} x = l \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -l \operatorname{tg} x.$$

(70) $y = l\left\{\cos\frac{x}{2}\right\}^2 = lu,\quad u = v^2,\quad v = \cos w,\quad w = \frac{x}{2};$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2},\quad \frac{du}{dv} = 2v = 2\cos\frac{x}{2},$$

$$\frac{dv}{dw} = -\sin w = -\sin\frac{x}{2},\quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2};$$

$$y' = \frac{1}{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} \cdot 2\cos\frac{x}{2} \cdot \left(-\sin\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

(71) $y = l\dfrac{a + b\,\mathrm{tg}\,x}{a - b\,\mathrm{tg}\,x} = lu, \quad u = \dfrac{a + b\,\mathrm{tg}\,x}{a - b\,\mathrm{tg}\,x};$

$$\frac{dy}{du} = \frac{a - b\,\mathrm{tg}\,x}{a + b\,\mathrm{tg}\,x},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(a - b\,\mathrm{tg}\,x)\dfrac{b}{\cos^2 x} - (a + b\,\mathrm{tg}\,x)\left(-\dfrac{b}{\cos^2 x}\right)}{(a - b\,\mathrm{tg}\,x)^2}$$

$$= \frac{b}{\cos^2 x} \cdot \frac{2a}{(a - b\,\mathrm{tg}\,x)^2};$$

$$y' = \frac{a - b\,\mathrm{tg}\,x}{a + b\,\mathrm{tg}\,x} \cdot \frac{2ab}{\cos^2 x\,(a - b\,\mathrm{tg}\,x)^2}$$

$$= \frac{2ab}{\cos^2 x\,(a^2 - b^2\,\mathrm{tg}^2 x)} = \frac{2ab}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$$

$$= \frac{2ab}{a^2(1 - \sin^2 x) - b^2\sin^2 x} = \frac{2ab}{a^2 - (a^2 + b^2)\sin^2 x}$$

$$= \frac{2ab}{a^2\cos^2 x - b^2(1 - \cos^2 x)} = \frac{2ab}{-b^2 + (a^2 + b^2)\cos^2 x}.$$

(72) $y = lf(x) = lu, \quad u = f(x); \quad \dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{f(x)}, \quad \dfrac{du}{dx} = f'(x);$

$$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Man nennt diesen Übergang von $lf(x)$ zum Differentialquotienten $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ die „logarithmische Differentiation" der Funktion $f(x)$ nach x.

73. Eine Anwendung von (72) macht man u. a. bei der wichtigen Aufgabe (s. § 17), den Differentialquotienten einer Potenz von der Form:

$$y = f(x)^{\varphi(x)}$$

zu ermitteln. Durch Logarithmieren kommt:

$$ly = \varphi(x)lf(x) = \varphi \cdot lf,$$

und durch logarithmische Differentiation von y nach x:

$$\frac{y'}{y} = \varphi\frac{f'}{f} + lf \cdot \varphi',$$

also mit Einsetzung des Wertes von y:

$$y' = \varphi f^{\varphi-1} f' + f^{\varphi} lf \cdot \varphi' = f^{\varphi-1}\{\varphi f' + f\varphi' lf\}.$$

Eine modifizierte Darstellung dieser Methode legt den oft zu verwendenden Gedanken (s. § 12, p. 127, Anm.) zu Grunde, eine vorgelegte Grösse a durch ihren natürlichen Logarithmus la auszudrücken: nach der Definition des Logarithmus ist ja $a = e^{la}$. Somit ist:

$$y = f^{\varphi} = e^{l\{f^{\varphi}\}} = e^{\varphi lf},$$

wodurch die Differentation von y auf die eines Produktes φlf zurückkommt. Man hat:

$$y = e^{u}, \quad u = \varphi lf; \quad \frac{dy}{du} = e^{u}, \quad \frac{du}{dx} = \varphi \frac{f'}{f} + lf \cdot \varphi';$$

$$y' = e^{u} \cdot \left\{\varphi \frac{f'}{f} + lf \cdot \varphi'\right\} = f^{\varphi}\left\{\varphi \frac{f'}{f} + lf \cdot \varphi'\right\},$$

also, wie oben:

$$y' = \varphi f^{\varphi-1} f' + f^{\varphi} lf \cdot \varphi' = f^{\varphi-1}\{\varphi f' + flf \cdot \varphi'\}.$$

Eine zweite, wesentlich andere Methode zur Lösung der fraglichen Aufgabe wird durch die Formel (s. § 13, Formel (IV a)) für die Differentiation nach x von $y = \psi\{f(x), \varphi(x)\}$ geliefert:

$$y' = \psi' = \frac{\partial \psi}{\partial f} f' + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \varphi'.$$

In unserem Falle ist $\psi = f^{\varphi}$, also $\frac{\partial \psi}{\partial f} = \varphi f^{\varphi-1}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = f^{\varphi} lf$,

somit wiederum:

$$y' = \varphi f^{\varphi-1} f' + f^{\varphi} lf \cdot \varphi'.$$

Besonders zu beachten ist der spezielle Fall:

(73 a) $y = x^{x}; \quad y' = x \cdot x^{x-1} + x^{x} lx = x^{x}(1 + lx).$

Weitere Beispiele zu (73) sind:

(74) $y = (ax)^{mx}; \quad f = ax, \quad \varphi = mx, \quad f' = a, \quad \varphi' = m;$
$y' = m(ax)^{mx}(1 + lx + la).$

(75) $y = (\sin x)^{\cos x}$; $f = \sin x$, $\varphi = \cos x$, $f' = \cos x$, $\varphi' = -\sin x$;

$$y' = (\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \, l \sin x).$$

(76) $y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$; $f = x$, $\varphi = \frac{1}{x}$, $f' = 1$, $\varphi' = -\frac{1}{x^2}$;

$$y' = \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{x}-1} \cdot 1 + x^{\frac{1}{x}} lx \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x \cdot x^{\frac{1}{x}-1} - x^{\frac{1}{x}} lx}{x^2} = \frac{x^{\frac{1}{x}}(1 - lx)}{x^2} = \sqrt[x]{x}\,\frac{1 - lx}{x^2}.$$

(77) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$; $f = \operatorname{arctg} x$, $\varphi = x$, $f' = \frac{1}{1+x^2}$, $\varphi' = 1$;

$$y' = \frac{x (\operatorname{arctg} x)^{x-1}}{1 + x^2} + (\operatorname{arctg} x)^x l (\operatorname{arctg} x)$$

$$= (\operatorname{arctg} x)^x \left\{ l (\operatorname{arctg} x) + \frac{x}{\operatorname{arctg} x (1 + x^2)} \right\}.$$

D. Implizite (oder unentwickelte) Funktionen (s. § 13).

(78) $\varphi(x, y) \equiv ax + by + c = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_1 = a$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_2 = b$;

$$y' = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{a}{b}.$$

(79) $\varphi \equiv a^{x-y} - x^y = 0$; $\varphi_1 = a^{x-y} la - y x^{y-1}$,

$\varphi_2 = a^{x-y} \cdot (-1) la - x^y lx$;

$$y' = \frac{a^{x-y} la - y x^{y-1}}{a^{x-y} la + x^y lx},$$

oder, wenn man mit Rücksicht auf die Relation $\varphi = 0$ a^{x-y} durch den ihm gleichen Wert x^y ersetzt:

$$y' = \frac{x^y la - y x^{y-1}}{x^y la + x^y lx} = \frac{x^{y-1}(xla - y)}{x^y (la + lx)} = \frac{xla - y}{xl(ax)}.$$

(80) $\varphi \equiv \sin x - \cos y = 0;\quad \varphi_1 = \cos x,\ \varphi_2 = \sin y;$

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin y}.$$

Nun ist wegen $\varphi = 0$ $\sin x = \cos y$, also nach den Elementen der Trigonometrie (s. diese Sammlung, Bd. III, § 28) $y = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin y = \pm \cos x$, und zwar gilt nach der Definition (s. § 10, 3) von $y = \arccos\{\sin x\}$, das obere Vorzeichen, wenn x dem ersten oder vierten, das negative, wenn y dem zweiten oder dritten Quadranten angehört; dementsprechend wird also:

$$y' = \mp 1.$$

Dies bestätigt sich bei direkter Differentiation von:

$$y = \arccos\{\sin x\};\quad y' = -\frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x$$

$$= -\frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

Gehört x dem ersten oder vierten Quadranten an, so ist $\cos x$ positiv, also $-\frac{\cos x}{|\cos x|} = -1$; gehört x aber dem zweiten oder dritten Quadranten an, so ist $\cos x$ negativ, also $-\frac{\cos x}{|\cos x|} = +1$.

Das Nämliche ergiebt sich bei unmittelbarer Differentiation von $x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

(81) $\varphi \equiv \cos x - x\cos y = 0;\ \varphi_1 = -\sin x - \cos y,\ \varphi_2 = x\sin y;$

$$y' = \frac{\sin x + \cos y}{x \sin y}.$$

Oft ist es zweckmässiger, namentlich für geometrische Anwendungen, die zur Herleitung von y' dienende Gleichung $\varphi_1 + \varphi_2 y' = 0$ als solche zu benutzen (oder, wie man sagt, „die Gleichung $\varphi = 0$ zu differenzieren").

(82) $\varphi \equiv y^2 - 2px = 0; \quad yy' - p = 0.$

(83) $\varphi \equiv \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} - c = 0; \quad \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b}{y}}\,y' \equiv \frac{1}{\sqrt{ax}} + \frac{y'}{\sqrt{by}} = 0.$

(84) $\varphi \equiv y^2 - 2px - qx^2 = 0; \quad yy' - p - qx = 0.$

(85) $\varphi \equiv x^2 + y^2 - (ax + b)^2; \quad yy' + x - a(ax + b) = 0.$

(86) $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0; \; (x - a) + (y - b)y' = 0.$

(87) $\varphi \equiv y^2 - 2ye^x + 2xly = 0;$

$\varphi_1 = -2ye^x + 2ly; \quad \varphi_2 = 2y - 2e^x + \frac{2x}{y},$

$(-ye^x + ly) + y'(y - e^x + xy^{-1}) \equiv yy' - e^x(y + y') + ly + xy^{-1}y' = 0.$

(88) $\varphi \equiv e^x \cos y - e^y \sin x = 0;$

$\varphi_1 = e^x \cos y - e^y \cos x, \; \varphi_2 = -e^x \sin y - e^y \sin x,$

$e^x \cos y - e^y \cos x - (e^x \sin y + e^y \sin x)y' = 0.$

(89) $\varphi \equiv \sin x + \sin y + \sin(x + y) = 0;$

$\varphi_1 = \cos x + \cos(x + y), \; \varphi_2 = \cos y + \cos(x + y),$

$\cos x + \cos(x + y) + \{\cos y + \cos(x + y)\}y' = 0.$

E. Funktionen von der Form $x = f(t)$, $y = g(t)$ (s. § 13, Formel (I')).

(90) $y = \frac{a}{a - t}, \; x = \frac{b}{b - t}; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{a}{(a - t)^2} \cdot (-1), \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{(b - t)^2} \cdot (-1);$

$$y' \equiv \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a(b - t)^2}{b(a - t)^2}.$$

(91) $y = \dfrac{1-t}{1+t}$, $x = \dfrac{2t}{1+t}$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t)\cdot(-1) - (1-t)\cdot 1}{(1+t)^2} = -\frac{2}{(1+t)^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t)\cdot 2 - 2t\cdot 1}{(1+t)^2} = \frac{2}{(1+t)^2};$$

$$y' = -1.$$

(92) $y = \sin^2 t$, $x = \sin 2t$;

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t\cos t = \sin 2t, \quad \frac{dx}{dt} = (\cos 2t)\cdot 2;$$

$$y' = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2t.$$

(93) $y = b\sin^2 t$, $x = a\cos^2 t$;

$$\frac{dy}{dt} = 2b\sin t\cos t, \quad \frac{dx}{dt} = 2a\cos t\cdot(-\sin t);$$

$$y' = -\frac{b}{a}.$$

(94) $y = a(1-\cos t)$, $x = a(t-\sin t)$, (Gleichung der Cycloide);

$$\frac{dy}{dt} = a\sin t = 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$$

$$= 2a\sin^2\frac{t}{2};$$

$$y' = \operatorname{cotg}\frac{t}{2},$$

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2};$$

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

5) $y = a(\sin t - t\cos t)$, $x = a(\cos t + t\sin t)$, (Gleichung der Kreisevolvente);

$$\frac{dy}{dt} = a(\cos t + t\sin t - \cos t) = at\sin t,$$

$$\frac{dx}{dt} = a(-\sin t + t\cos t + \sin t) = at\cos t;$$

$$y' = \operatorname{tg} t; \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}; \quad y'' = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{at\cos t} = \frac{1}{at\cos^3 t}.$$

96) $y = t - \cos t$, $x = t - \sin t$;

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t;$$

$$y' = \frac{1 + \sin t}{1 - \cos t}.$$

Nun ist nach den Elementen der Trigonometrie (s. diese Sammlung, Bd. III, § 28) $\sin t = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$, also:

$$y' = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{1 - \cos t} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)}{\sin^2\frac{t}{2}}.$$

97) $y = \frac{a\sin t}{1 + b\cos t}$, $x = \frac{c\cos t}{1 + b\cos t}$;

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1 + b\cos t)\cdot a\cos t - a\sin t\cdot(-b\sin t)}{(1 + b\cos t)^2}$$

$$= \frac{a\cos t + ab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{(1 + b\cos t)^2} = \frac{a\cos t + ab}{(1 + b\cos t)^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1 + b\cos t)\cdot(-c\sin t) - c\cos t\cdot(-b\sin t)}{(1 + b\cos t)^2}$$

$$= -\frac{c\sin t}{(1 + b\cos t)^2};$$

$$y' = -\frac{a(b + \cos t)}{c\sin t}.$$

(98) $y = (a+r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}t\right)$,

$x = (a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}t\right)$, (Gleichung der Epi- resp. Hypo-Cycloide);

$$\frac{dy}{dt} = (a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}t\right)\cdot\frac{a+r}{a}$$

$$= (a+r)\left\{\cos t - \cos\left(\frac{a+r}{a}t\right)\right\}$$

$$= -2(a+r)\sin\left(\frac{2a+r}{2a}t\right)\cdot\sin\left(\frac{r}{2a}t\right),$$

$$\frac{dx}{dt} = -(a+r)\sin t + a\sin\left(\frac{a+r}{a}t\right)\cdot\frac{a+r}{a}$$

$$= -(a+r)\left\{\sin t - \sin\left(\frac{a+r}{a}t\right)\right\}$$

$$= 2(a+r)\cos\left(\frac{2a+r}{2a}t\right)\sin\left(\frac{r}{2a}t\right);$$

$$y' = \frac{2(a+r)\sin\left(\frac{2a+r}{2a}t\right)\sin\left(\frac{r}{2a}t\right)}{2(a+r)\cos\left(\frac{2a+r}{2a}t\right)\sin\left(\frac{r}{2a}t\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{2a+r}{2a}t\right),$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2a+r}{2a}t\right)}\cdot\frac{2a+r}{2a};$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{2a+r}{2a}t\right)}\cdot\frac{2a+r}{2a}}{2(a+r)\cos\left(\frac{2a+r}{a}t\right)\cdot\sin\left(\frac{r}{2a}t\right)}$$

$$= \frac{2a+r}{4a(a+r)}\cdot\frac{1}{\cos^3\left(\frac{2a+r}{2a}t\right)\sin\left(\frac{r}{2a}t\right)}.$$

99) $y = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+t^2}\cdot 1 - \frac{2t\cdot t}{2\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2-t^2}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{1+t^2}\right) \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \cdot \frac{(-1)}{1+t^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2};$$

$y' = 1$.

100) $y = 2\sin t - \sin 2t$, $x = 2\cos t - \cos 2t$;

$$\frac{dy}{dt} = 2\cos t - (\cos 2t)\cdot 2, \quad \frac{dx}{dt} = -2\sin t + (\sin 2t)\cdot 2;$$

$$y' = -\frac{\cos t - \cos 2t}{\sin t - \sin 2t} = \frac{\sin\frac{3}{2}t \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{3}{2}t \sin\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3}{2}t.$$

Abschnitt II.

Reihenentwickelungen.

Kapitel I.

Der Mittelwertsatz mit Anwendungen.

§ 15. Das Rollesche Theorem und der Cauchysche Mittelwertsatz.

In § 7 IV wurde der binomische Satz, in seiner Erweiterung auf ganze Funktionen, dahin formuliert:

„Ist $f(x)$ eine ganze Funktion n^{ter} Ordnung von x, und sind a, b irgend zwei verschiedene Werte des Argumentes x, so ist die Differenz $f(b) - f(a)$ nach steigenden Potenzen der Differenz $b - a = h$ entwickelbar, derart, dass der Koeffizient von h^i die mit $i!$ dividierte i^{te} Ableitung von $f(a)$ {d. i. von $f(x)$, mit nachheriger Einsetzung des Wertes a} war:

$$f(b) - f(a) = hf'(a) + h^2\frac{f''(a)}{2!} + h^3\frac{f'''(a)}{3!} + \ldots$$
$$+ h^i\frac{f^{(i)}(a)}{i!} + \ldots + h^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \qquad \text{(I)}$$

Es wurde bereits damals die weiterreichende Aufgabe gestellt, auch für andere Funktionen eine entsprechende Entwickelung h[illegible]rde in § 12, Vb

b für die Exponentialfunktion e^x resp. a^x*) $(a > 0)$ eine artige Entwickelung gegeben, nur mit dem Unterschiede, s die letztere beliebig weit fortsetzbar ist: brach man an nd einer Stelle ab, so war man im stande, den durch rnachlässigung des Restes begangenen (bei hinreichend tem Vorgehen beliebig abnehmenden) Fehler abzuschätzen. lem wir nunmehr die fragliche Aufgabe allgemeiner in griff nehmen, werden wir uns zuvörderst auf einen ersten nritt zu ihrer Lösung zu beschränken versuchen. Man ge nämlich:

(A) „ob es nicht für eine beliebige Funktion $f(x)$ eine Identität giebt, die die Differenz $f(b) - f(a)$ allein durch den ersten Differentialquotienten von f auszudrücken gestattet?“

Da nach der Definition des Differentialquotienten (§ 8 (V)):

$$\lim_{h=0} \frac{f(b) - f(a)}{h} = f'(a) \tag{1}$$

st, so liegt die Vermutung nahe, dass die gesuchte Relation, falls sie überhaupt existiert, von der Form:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{2}$$

sein wird, wo ξ einen vorläufig noch unbekannten Wert des Argumentes x bedeutet, der, mit Rücksicht auf den besonderen Fall (1), für $\lim (b - a) = 0$ den Grenzwert a annehmen müsste.**)

Gesetzt, die Identität (2) wäre richtig, so könnte man sie auch in der Gestalt schreiben:

$$f(b) - f(a) - (b - a) f'(\xi) = 0. \tag{2a}$$

Da ξ unbekannt ist, so repräsentiert in gewissem Sinne auch $f'(\xi)$ eine unbekannte Grösse — sie werde mit D bezeichnet — von der man zwar weiss, dass sie mit dem

*) Der Wert a der Basis von a^x hat mit dem in der Formel (I) des Textes so bezeichneten Werte a nichts zu thun.

**) Danach ist es also wahrscheinlich, dass ξ von der Gestalt ϑh sein wird, wo ϑ einen unbekannten (aber stets endlich enden) Faktor bedeutet.

Differenzenquotienten $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ von f dem Werte nach übereinstimmt, von der aber verlangt wird, sie der Form nach als ersten, für einen gewissen Wert des Argumentes gebildeten Differentialquotienten von f darzustellen.

Indem man diese Grösse D, die jedenfalls nur von der Natur der Funktion $f(x)$, sowie von der Auswahl der beiden Werte a, b abhängt, statt $f'(\xi)$ in (2a) einführt, kommt:

$$f(b) - f(a) - (b - a)\, D = 0. \tag{3}$$

Wir erheben uns nunmehr auf einen höheren Standpunkt, indem wir die Gleichung (3) als besonderen Fall einer allgemeineren Erscheinung auffassen. Dadurch, dass wir auf der linken Seite von (3) die feste Grösse a in $f(a)$ und in $(b - a)$ durch eine unabhängige Variable x ersetzen, konstruieren wir eine Funktion $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x)\, D, \tag{4}$$

die wegen (3) für den Wert $x = a$, offenbar aber auch für $x = b$ den Wert Null annimmt, und deren Differentiation liefert:

$$\varphi'(x) = -f'(x) + D. \tag{5}$$

Dies lehrt aber, daſs unsere Aufgabe darauf hinauskommt, einen Wert ξ von x ausfindig zu machen, für den der Differentialquotient $\varphi'(x)$ der für $x = a$ und $x = b$ verschwindenden Funktion $\varphi(x)$ (4) verschwindet: denn für einen solchen Wert ξ von x und nur für einen solchen würde nach (5) eben $D = f'(\xi)$ folgen, und damit die ursprünglich aufgeworfene Frage (A) erledigt sein.

Indem wir vorderhand von der besonderen Natur der Funktion $\varphi(x)$ (4) absehen, stehen wir vor der allgemeineren Frage:

> (B) „Wenn eine Funktion $\varphi(x)$ vorliegt, die für $x = a$ und $x = b$ verschwindet, lässt sich stets ein Wert ξ von x nachweisen, für den $\varphi'(x)$ verschwindet, und wie?

Es mögen erst einige einfache Beispiele betrachtet werden. Sei:

$$\varphi(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - x(a + b) + ab,$$

so wird:

$$\varphi'(x) = 2x - (a + b).$$

Es giebt also hier immer einen und nur einen Wert $\xi = \frac{a+b}{2}$, für den $\varphi'(x)$ gleich Null ist. Offenbar liegt dieser Wert ξ zwischen a und b (er ist geometrisch der Mittelpunkt der Strecke ab, s. diese Sammlung Bd. VIII, § 4).

Zweitens sei:

$$\varphi(x) = x(x-a)(x-b) = x^3 - x^2(a+b) + xab,$$
$$\varphi'(x) = 3x^2 - 2x(a+b) + ab.$$

Man überzeugt sich auf elementarem Wege davon,*) dass die beiden Wurzeln der Gleichung $\varphi'(x) = 0$ (bei reellen a, b) stets reell sind und dass jedenfalls die eine von ihnen dem Intervalle (a, b) (d. h. von a bis b) angehört.

---

*) Die beiden Wurzeln

$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 3ab}}{3} = \frac{a+b \pm \sqrt{(b-a)^2 + ab}}{3}$$

sind reell, da der Radikand niemals negativ werden kann.

Ferner sei $a < b$, also $b - a = h$ positiv. Dann ist:

$$x_1 - a = \frac{h + \sqrt{a^2 + h^2 + ah} - a}{3}$$

immer positiv, da bei positivem a der Radikand $> a^2$ wird. Andererseits ist:

$$b - x_1 = \frac{h + b - \sqrt{b^2 - bh + h^2}}{3}$$

bei positivem b ebenfalls positiv, da der Radikand $< (b+h)^2$ wird. Bei negativem b dagegen ist:

$$b - x_2 = \frac{h + b + \sqrt{b^2 - bh + h^2}}{3}$$

positiv, da der Radikand jetzt $> (b+h)^2$, aber zugleich auch:

$$x_2 - a = \frac{h - a - \sqrt{h^2 + a^2 + ah}}{3}$$

positiv, da der Radikand jetzt $< (h-a)^2$. Somit liegt bei positivem b die Wurzel x_1, bei negativem b die Wurzel x_2 im Intervalle von a bis b, und dies bleibt auch in den Grenzfällen gültig, wenn a resp. $b = 0$, da dann $x_1 = \frac{2b}{3}$ resp. $x_2 = \frac{2a}{3}$ wird. Ist endlich $a = b$, so ist bei positivem a $x_1 = a$, *bei negativem* a $x_2 = a$, so dass der Satz auch *hier noch erhalten bleibt.*

Ein weiteres Beispiel sei $\sin x$ für das Intervall $(0, \pi)$. Es hat $(\sin x)' = \cos x$ (innerhalb der vier Quadranten, d. i. von 0 bis 2π) die beiden Nullwerte $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, deren erster im Intervalle $(0, \pi)$ liegt.

Eine entsprechende Eigenschaft zeigt die etwas allgemeinere Funktion $\sin\left(\pi \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)$ im Intervalle (x_0, x_1).

Dagegen zeigt die Funktion $\operatorname{tg} x$ im Intervall $(0, \pi)$ ein wesentlich anderes Verhalten. Denn $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ verschwindet überhaupt nicht (für einen reellen Wert von x); andererseits weiss man, dass sowohl $\operatorname{tg} x$ wie $\frac{1}{\cos^2 x}$ innerhalb des Intervalles $(0, \pi)$ einmal, nämlich an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ unendlich gross werden, also daselbst unstetig sind.

Man wird daher, im Hinblick auf diese Beispiele, von der für $x = a$ und $x = b$ verschwindenden Funktion $\varphi(x)$ — mag sie im übrigen noch so allgemein sein — voraussetzen, nicht nur, wie überhaupt von einer Funktion*) von x, dass sie, nebst ihrem ersten Differentialquotienten, in dem zu Grunde zu legenden Intervalle (a, b) eindeutig bestimmt ist, d. h. für jeden Wert von x, von a bis b, je nur einen einzigen völlig bestimmten Wert annimmt, sondern auch, dass sie, nebst ihrem ersten Differentialquotienten, im Intervalle (a, b) überall stetig ist, insbesondere also nicht unendlich gross wird.

Zunächst werde der einfachste Fall in Betracht gezogen, dass $\varphi(x)$ {abgesehen von $x = a$ und $x = b$, wo $\varphi(x) = 0$} innerhalb des Intervalles (a, b) nirgends verschwindet; es mögen ausserdem $\varphi'(a)$ und $\varphi'(b)$ von Null verschieden vorausgesetzt werden. Es sei etwa $a < b$.

Dann ist $\varphi(x)$ innerhalb des ganzen Intervalles (a, b) entweder ausschliesslich positiv oder aber ausschliesslich negativ.

---

*) Wenn also im folgenden von irgend einer Funktion die Rede ist, so ist die Eigenschaft ihrer eindeutigen Existenz (in einem bestimmten Intervalle) stillschweigend vorausgesetzt, und das Gleiche soll von ihrem ersten Differentialquotienten gelten.

Sei etwa das erstere der Fall, so bilde man an der Stelle a den Differenzenquotienten von φ:

$$D_a = \frac{\varphi(a + \Delta a) - \varphi(a)}{\Delta a} *),$$

wo $a + \Delta a$ einen Wert zwischen a und b bezeichne; wegen $\varphi(a) = 0$ reduziert sich D_a auf $\frac{\varphi(a + \Delta a)}{\Delta a}$, d. i. auf einen Bruch, dessen Zähler und Nenner positiv sind, der also positiv ist und es auch bleibt, wie klein Δa gewählt werden mag. Es ist daher auch:

$$\lim_{\Delta a = 0} \frac{\varphi(a + \Delta a) - \varphi(a)}{\Delta a} = \varphi'(a)$$

positiv, und zwar nach den getroffenen Voraussetzungen endlich und von Null verschieden. Andererseits bilden wir an der Stelle b den Differenzenquotienten:

$$D_b = \frac{\varphi(b - \Delta b) - \varphi(b)}{-\Delta b} *),$$

wo $b - \Delta b$ wiederum einen Wert zwischen a und b bedeute: wegen $\varphi(b) = 0$ reduziert sich D_b auf $\frac{\varphi(b - \Delta b)}{-\Delta b} = -\frac{\varphi(b - \Delta b)}{\Delta b}$, d. i. auf einen Bruch, der negativ ist und es bleibt, wie klein

---

*) Dieser, für ein positives Δa gebildete Differenzenquotient D_a von φ wird, ebenso wie der zugehörige Differentialquotient, als der „vorwärts genommene" bezeichnet; entsprechend der für ein negatives $-\Delta b$ gebildete Differenzenquotient D_b von φ, ebenso wie der zugehörige Differentialquotient als der „rückwärts genommene." Die Betrachtungen des Textes würden gültig bleiben, auch wenn der an der Stelle $x = a$ rückwärts genommene Differentialquotient von φ von dem vorwärts genommenen verschieden wäre oder auch gar nicht existierte, und das Entsprechende gilt für die Stelle b. So hat, der Definition der Potenz nach, für $x^n (x \geq 0,\ n > 0)$ an der Stelle $x = 0$ nur der vorwärts genommene Differentialquotient nx^{n-1} einen Sinn, der den Wert 0 resp. 1 resp. ∞ besitzt, je nachdem $n > 1$ resp. $= 1$ resp. < 1 ist. Doch haben, von derartigen vereinzelten Grenzstellen abgesehen, solche und ähnliche feinere Unterscheidungen zwischen verschiedenen Arten von Differentialquotienten innerhalb des Rahmens dieses Buches keine Bedeutung, da die hier in Betracht kommenden einfachen Funktionen an jeder Stelle nur einen Differentialquotienten besitzen.

man auch Δb wähle; mithin ist auch $\varphi'(b)$ negativ und nach Voraussetzung ebenfalls endlich und von Null verschieden.

Nun erscheint es zwar durch unmittelbare Anschauung plausibel, dass, wenn eine Grösse — wie hier $\varphi'(x)$, während die unabhängige Variable x das Intervall von a bis b stetig durchläuft — bei stetiger Veränderung, von einem positiven Werte ausgehend, schliesslich einen negativen Wert erreicht, sie wenigstens einmal den Wert Null passiert haben muss; es müsste also wenigstens einen Wert ξ von x zwischen a und b geben, für den $\varphi'(x)$ verschwindet. Hierbei ist unter dem „stetigen" Durchlaufen einer Variabeln x von a bis b $(a < b)$ zu verstehen, dass x, ohne abzunehmen, jeden beliebig vorgegebenen rationalen oder irrationalen Wert, der $\geq a$, $\leq b$, anzunehmen im stande ist.

Es wird aber notwendig sein, nicht nur die Existenz eines solchen Wertes ξ arithmetisch genauer zu begründen, sondern zugleich auch ein Mittel zu beliebig angenäherter Berechnung desselben anzugeben.

Der Einfachheit halber wollen wir uns dabei auf eine besondere, allgemein geläufige Darstellung einer Grösse ξ beschränken, indem wir nach den Elementen der Arithmetik der irrationalen Grössen festsetzen:

> „Eine reelle Zahlengrösse gilt als eindeutig definiert, wenn sie in einen — endlichen oder unendlichen — Dezimalbruch*) entwickelbar ist, so dass sich nach irgend einem Gesetze stets angeben lässt, welche der Ziffern 0 bis 9 an irgend einer von jemand bezeichneten Stelle des Dezimalbruches steht."

Wie die Arithmetik zeigt, stellt dann auch die Summe und Differenz, sowie das Produkt zweier solcher Dezimalbrüche eine völlig bestimmte Grösse dar.

Der Kürze halber sei gesetzt:

$$(6) \quad \varphi'(x) = \psi(x), \quad \psi(a) = \alpha\,(>0), \quad \psi(b) = -\beta\,(\beta > 0).$$

---

*) Theoretisch würde es für die folgende Entwickelung einfacher sein, „dyadische" Brüche zu Grunde zu legen, d. s. solche, die nach natürlichen Potenzen von $\frac{1}{2}$ $\left(\text{statt } \frac{1}{10}\right)$ fortschreiten.

Das einzuschlagende Verfahren zur Ermittelung von ξ ist nun völlig analog dem ganz elementaren, das zur Berechnung etwa der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl dient. Man denke sich das Intervall $b - a = h$ durch 9 eingeschaltete Teilwerte in 10 gleiche Teilintervalle zerlegt, die der Reihenfolge nach (von a aus beginnend) mit $h_0, h_1, \ldots, h_9$ bezeichnet seien. Würde jetzt $\psi(x)$ speziell für einen der 9 Teilwerte, etwa den i^{ten} $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, verschwinden, so wäre bereits:

$$\xi = a + \frac{i}{10} h = a + h \cdot 0{,}i$$

ein Wert von x, wie er gesucht wird.

Tritt jedoch dieser Spezialfall nicht ein, so muss es doch, von a aus gerechnet, ein erstes unter den Intervallen h_0, $h_1, \ldots, h_9$ geben — es sei unter Benutzung des nämlichen Indexzeichens i $(i = 0, 1, \ldots, 9)$ mit h_i bezeichnet — derart, dass $\psi(x)$ für den kleineren (unteren*) Endwert von h_i positiv, für den grösseren (oberen) Endwert von h_i dagegen negativ ausfällt; denn für den ersten unteren Endwert a ist ja ψ positiv und für den letzten oberen Endwert b negativ.

Auf dieses Teilintervall h_i werde der Zehnteilungsprozess abermals angewandt. Würde $\psi(x)$ speziell für einen der 9 eingeschalteten Teilwerte, etwa für den k^{ten} $(k = 1, 2, \ldots, 9)$, verschwinden, so wäre ersichtlich:

$$\xi = a + h\left(\frac{i}{10} + \frac{k}{100}\right) = a + h \cdot 0{,}ik$$

ein Wert von x, wie man ihn sucht. Im anderen Falle dagegen nenne man die 10 Teilintervalle von h_i der Reihe nach $i_0, i_1, \ldots, i_9$, so muss es wiederum, von i_0 beginnend, ein erstes Intervall, etwa i_k $(k = 0, 1, \ldots, 9)$, geben, so dass im Beginn desselben $\psi(x)$ einen positiven, am Ende desselben $\psi(x)$ einen negativen Wert erhält.

Setzt man dies Verfahren entsprechend fort, so ergiebt sich folgendes. Entweder 1) stösst man auf einen bestimmten Wert $\xi = a + h\vartheta$, wo ϑ einen endlichen Dezimalbruch

---

*) Der Anfangswert eines Intervalles (a, b), $a < b$, darf auch als kleinerer oder unterer Endwert bezeichnet werden und demgemäss der Endwert als grösserer oder oberer Endwert.

zwischen 0 und 1 bedeutet, für den $\psi(x)$ verschwindet. Oder aber 2) es lässt sich ein Wert $\xi = a + h\eta$, wo η einen zwischen 0 und 1 liegenden unbegrenzten Dezimalbruch $0,ikl\ldots$ bedeutet, mit nachstehender Eigenschaft angeben. Bricht man diesen Dezimalbruch η irgendwo ab, etwa hinter der n^{ten} Stelle, wodurch er den Näherungswert η_n annehme, so erhält man ein Intervall von der Länge $\frac{h}{10^n}$, von $a + h\eta_n$ bis $a + h\eta_n + \frac{h}{10^n}$, so, dass ψ für den Anfangswert des Intervalles positiv $= \alpha_n$, für dessen Endwert aber negativ $= -\beta_n$ ist. Gemäss der von a bis b vorausgesetzten Stetigkeit von $\psi(x)$ kann man sich aber n so gross gewählt denken, dass der Unterschied der beiden Werte, die ψ in den Enden eines Teilintervalles von der Länge $\frac{h}{10^n}$ annimmt, absolut genommen, unter jede Grenze sinkt. Mithin muss im vorliegenden Falle der fragliche Unterschied $\alpha_n - (-\beta_n) = \alpha_n + \beta_n$ und damit sowohl α_n als β_n selber bei beliebig wachsendem n den Grenzwert Null besitzen.

Setzt man also $\xi_n = a + h\eta_n$, so wird:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \xi_n = \xi = a + \eta(b - a),\ 0 < \eta < 1, \text{ wo} \\ &\lim_{n=\infty} \psi(\xi_n) = \psi(\xi) = 0, \end{aligned}$$

ein Wert, wie man ihn sucht, womit ξ auch im zweiten Falle ermittelt ist.

Offenbar bleibt der geführte Beweis derselbe, wenn $\psi(a)$ negativ und $\psi(b)$ positiv vorausgesetzt worden wäre.

Nunmehr kann man sich auch von den oben gemachten beschränkenden Annahmen befreien.

Es möge also erstens die Möglichkeit zugelassen werden, dass $\psi(x)$ nicht nur für die Endwerte a, b des Intervalles (a, b) verschwindet, sondern auch innerhalb desselben ein- oder mehreremal, selbst beliebig oft, für $x = a_1, a_2, a_3, \ldots$; es soll sich nur unter den sämtlichen Teilintervallen von (a, b) wenigstens eines befinden, das nicht unter eine vorgegebene (wenn auch noch so kleine) Grenze g heruntersinkt. [Würde nämlich ein derartiges Intervall nicht existieren,

würde $\psi(x)$ mit Rücksicht auf seine Stetigkeit überall*) innerhalb (a, b) den Wert Null haben, und man könnte dann für ξ jeden beliebigen Wert zwischen a und b wählen.] Auf das fragliche Intervall lässt sich aber der eben bewiesene Satz anwenden, und der bezügliche Wert ξ innerhalb dieses Intervalles liegt jedenfalls auch innerhalb des ursprünglichen Intervalles (a, b).

Damit ist zunächst der Hilfssatz hergeleitet, den man bezeichnet als das „Rollesche Theorem“:

> I. „Ist eine Funktion $\psi(x)$ für ein vorgelegtes Intervall (a, b) stetig, und sind die Werte von $\psi(a)$ und $\psi(b)$ von entgegengesetztem Vorzeichen, so giebt es innerhalb des Intervalles (a, b) mindestens einen Wert ξ, für den $\psi(x)$ verschwindet.“

Für spätere Zwecke ist es nützlich, das Theorem gleich dahin zu erweitern:

> Ia. „Ist eine Funktion $\chi(x)$ für ein vorgelegtes Intervall (a, b) stetig und ist $\chi(a) = \alpha$, $\chi(b) = \beta$ $(\alpha \gtrless \beta)$, so nimmt die Funktion $\chi(x)$ auch jeden Wert γ zwischen α und β mindestens einmal an, während x sich stetig von a bis b verändert.“

Denn man braucht nur die Hilfsfunktion $\psi(x) = \chi(x) - \gamma$ zu konstruieren, dann sind:

$$\psi(a) = \chi(a) - \gamma = \alpha - \gamma \text{ und } \psi(b) = \chi(b) - \gamma = \beta - \gamma$$

von entgegengesetztem Vorzeichen, und es giebt nach dem Rolleschen Theorem I mindestens einen Wert ξ von x innerhalb (a, b), für den $\psi(x) = 0$ i. e. $\chi(x) = \gamma$ wird.

Man nennt einen derartig existierenden, wenn im übrigen auch unbekannten Wert ξ zwischen a und b, der von a sowohl wie von b um eine angebbare Grösse verschieden ist, einen „mittleren Wert“ oder auch einen „Mittelwert“

*) In der Integralrechnung wird der wichtige Satz bewiesen, dass im Falle $\psi(x) = \varphi'(x)$ die Funktion $\varphi(x)$ dann von a bis b einen konstanten Wert annimmt.

zwischen a und b; nach obigem lässt er sich stets in di Form setzen:

$$\xi = a + \vartheta h = a + \vartheta(b - a), \quad 0 < \vartheta^*) < 1. \tag{8}$$

Indem nunmehr das Rollesche Theorem I auf den Fall (6) $\psi(x) = \varphi'(x)$ angewandt wird, ergiebt sich der „Zwischensatz":

> II. „Ist $\varphi(x)$ nebst $\varphi'(x)$ für ein Intervall (a, b) stetig und ist $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$, so giebt es mindestens einen Mittelwert ξ (8), so dass $\varphi'(\xi) = 0$ ist."

Hier haben wir uns nur noch von der weiteren, oben gemachten beschränkenden Annahme zu befreien, dafs $\varphi'(a)$ und $\varphi'(b)$ von Null verschieden sein sollten. Sei also etwa $\varphi'(a) = 0$, $\varphi'(b)$ von Null verschieden. Wir dürfen uns nach Obigem auf den Fall beschränken, dass $\varphi(x)$ zwar für $x = a$ und $x = b$, innerhalb des Intervalles (a, b) aber nicht verschwindet. Dann wird, wie oben, mit Rücksicht auf die Stetigkeit von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ gezeigt, dass $\varphi'(b)$ negativ ausfällt; zugleich geht aus dem geführten Beweise hervor, dass sich innerhalb (a, b) ein Wert a_1 angeben lassen muss so dass $\varphi'(a_1) > 0$. Alsdann wende man den Zwischensatz II auf das Intervall (a, b) an. Entsprechend verfährt man, falls $\varphi'(b)$ oder auch gleichzeitig $\varphi'(a)$ und $\varphi'(b)$ verschwinden sollten.

Schliesslich werde im Zwischensatze II für $\varphi(x)$ die unter (4) angegebene besondere Funktion $\varphi(x)$ eingesetzt:

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x)\,D, \tag{4}$$

wo:

$$\varphi'(x) = -f'(x) + D. \tag{5}$$

Sobald $f(x)$ und $f'(x)$ für das Intervall (a, b) als eindeutig existierend und stetig vorausgesetzt werden, sind es offenbar auch $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$. Daraus resultiert der sogenannte Cauchysche Mittelwertsatz:

---

*) Der Kürze halber werde von jetzt ab die obige, nur zur vorläufigen Orientierung eingeführte Trennung in der Bezeichnung „ϑ für einen endlichen Dezimalbruch zwischen 0 und 1, η für einen unendlichen Dezimalbruch zwischen 0 und 1" fallen gelassen und ϑ als gemeinsames Zeichen für beide Fälle verwendet.

III. „Ist eine Funktion $f(x)$ nebst ihrem ersten Differentialquotienten $f'(x)$ für ein Intervall (a, b) stetig, so giebt es mindestens einen Mittelwert ξ zwischen a und b, so, dass sich der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ als Differentialquotient $f'(\xi)$ darstellen lässt*):

$$(III) \qquad f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)=hf'(a+\vartheta h), \quad 0<\vartheta<1, \quad b-a=h\text{“}.$$

Ehe das eingeschlagene Verfahren auf die höheren Differentialquotienten von $f(x)$ ausgedehnt wird, sollen erst aus dem Mittelwertsatz als gemeinsamem Ursprunge einige fundamentale Folgerungen gezogen werden, die die Lehren von der Stetigkeit (§ 16), der „Unbestimmtheitswerte“ (§ 17) und der „Maxima und Minima“ (§ 18), betreffen.

§ 16. Stetigkeitsabmessungen.

In den §§ 8 bis 12 wurde für die verschiedenen elementaren Funktionen $f(x)$, deren Differentialquotient zu bestimmen war, die Eigenschaft der Stetigkeit nicht nur theoretisch nachgewiesen, sondern auch für die meisten jener Funktionen praktisch gemessen, d. h. wenn innerhalb eines jeweils passend gewählten Intervalles (a, b) x und

---

*) Der Satz III lässt eine einfache geometrische Deutung zu (vgl. die Sätze über Sehne und Tangente zu Beginn des dritten Abschnittes). Man denke sich in der Ebene einen zwischen zwei Punkten P, Q ganz im Endlichen, stetig und mit stetig veränderlicher Tangente verlaufenden Kurvenbogen, der von jeder in einer bestimmten, etwa der vertikalen Richtung zwischen P und Q gezogenen Geraden nur in einem Punkte getroffen werde (s. Fig. 11). Dann weist der Kurvenbogen mindestens eine, der Sehne PQ parallel verlaufende Tangente auf. Der Satz II repräsentiert dann den besonderen Fall, dass P und Q auf der Abscissenachse liegen. Noch einfacher ist die Deutung des Satzes I. Liegen zwei Punkte auf verschiedenen Seiten einer Geraden (etwa der Abscissenachse), und verbindet man die beiden Punkte durch einen ganz im Endlichen und stetig verlaufenden Kurvenbogen, so muss derselbe die Gerade mindestens einmal treffen.

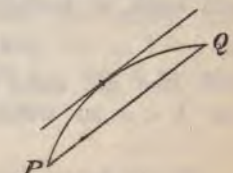


Fig. 11.

$x + h$ zwei Werte des Argumentes waren, so wurde $|h|$*) so klein bestimmt, dass $|f(x + h) - f(x)|$ unter einer festen, vorgegebenen (wenn auch noch so klein gewählten) positiven Grösse ε lag, und dies umsomehr, wenn der Wert von $|h|$ noch mehr verkleinert wurde. Im besonderen konnte $|h|$ so bestimmt werden, dass es für je zwei Werte x, $x + h$ innerhalb des ganzen, vorgelegten Intervalles unter einer und derselben, von ε abhängigen Grenze lag. Im letzteren Falle möge die Stetigkeit von Funktionen als eine für das vorgelegte Intervall (a, b) „gleichmässige" bezeichnet werden.

Die zugehörigen Rechnungen waren nicht immer ganz einfach und durchsichtig. Die wesentlichen Ergebnisse (nebst einigen weiteren**) können jetzt, sobald nur die theoretische Eigenschaft der Stetigkeit einmal als bekannt vorausgesetzt wird, kürzer und einfacher auf Grund des Cauchyschen Mittelwertsatzes (§ 15) erhalten werden. Wir beschränken uns daher auf die innerhalb eines geeigneten Intervalles (a, b) gleichmässige Stetigkeit; um hieraus die auf ein Teilintervall $(x, x + h)$ bezügliche Stetigkeit abzuschätzen, hat man nur die im Ergebnis auftretende obere resp. untere Grenze des Intervalles (a, b) mit der oberen resp. unteren Grenze des Teilintervalles $(x, x + h)$ zu vertauschen.

Unter ϑ ist, wie in § 15, im folgenden stets ein Wert zwischen 0 und 1 zu verstehen.

1. $\sin x$ in einem beliebigen Intervalle.

Da $\sin x$, wie $(\sin x)' = \cos x$ stets stetig sind, so hat man für irgend ein, wenn auch noch so kleines Zwischenintervall $(x, x + h)$:

$$\sin(x + h) - \sin x = h \cos(x + \vartheta h). \tag{1}$$

Da der absolute Wert des Cosinus höchstens gleich Eins sein kann, so kommt unmittelbar:

$$|\sin(x + h) - \sin x| \leqq |h|. \tag{2}$$

Soll also die linke Seite von (2) $< \varepsilon$ werden, so hat man nur $|h| < \varepsilon$ zu wählen. Genau das Entsprechende gilt für

*) Die beiden senkrechten Striche bedeuten, wie nochmals angegeben sei, den absoluten Wert der eingeschlossenen Grösse.

**) So war vor allem der unter 7. behandelte Fall der Potenz in § 11 unterdrückt worden, weil die auf der damaligen Stufe erforderlichen Rechnungen zu umständlich ausgefallen wären.

$\cos x$. Das Nämliche ergab sich bereits in § 9 auf Grund der Formeln (3), (4) und (3a) daselbst.

2. $\operatorname{tg} x$.

Es sind $\operatorname{tg} x$, sowie $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ überall stetig mit Ausnahme der Stellen, wo $\cos x$ verschwindet, also innerhalb der ersten vier Quadranten, d. h. von 0 bis $\pm\pi$, nur für $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Es sei also der Einfachheit halber etwa das Intervall $(0, b)$ zu Grunde gelegt, wo $|b|$ einen Wert zwischen 0 und $\dfrac{\pi}{2}$ bedeute.

Seien dann wieder x, $x + h$*) zwei Werte innerhalb dieses Intervalles, so wird:

$$\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x = h \cdot \frac{1}{\cos^2(x + \vartheta h)}. \tag{3}$$

Der grösste Wert, den $\dfrac{1}{\cos^2}$ innerhalb $(0, b)$ annehmen kann, tritt für $x = b$ selbst auf, da hier $\cos^2$ seinen kleinsten Wert erhält. Somit entsteht:

$$|\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x| \leqq |h| \frac{1}{\cos^2 b}; \tag{4}$$

soll also die linke Seite unter ε heruntersinken, so hat man nur $|h| < \varepsilon \cos^2 b$ zu wählen. Man vergleiche hiermit die unbequeme und im einzelnen kaum genauere Regel in § 9, S. 88.

Offenbar hat es gar keine Schwierigkeit, die entsprechenden Ergebnisse für Intervalle anzugeben, die einem andern Quadranten angehören, oder auch für solche, die sich zugleich auf zwei Quadranten erstrecken, wie z. B. (a, b), wenn a negativ $= -a_1$, b positiv, und a_1, wie b kleiner als $\dfrac{\pi}{2}$ sind.

Analog verhält sich $\operatorname{cotg} x$.

---

*) Die entsprechende Bemerkung kann der Kürze halber im folgenden unterdrückt werden.

3. $\arcsin x$.

Diese Funktion ist für jedes x, wo $|x| \leqq 1$, stetig; desgleichen auch $(\arcsin x)' = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$, letztere Funktion jedoch mit alleiniger Ausnahme der Werte $x = \pm 1$. Liegt also etwa ein Intervall $(0, b)$ $(|b| < 1)$ vor, so hat in ihm $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ersichtlich den grössten Wert für $x = b$, also ist:

$$|\arcsin(x+h) - \arcsin x| \leqq |h| \frac{1}{+\sqrt{1-b^2}}; \tag{5}$$

soll die linke Seite $< \varepsilon$ werden, so nehme man $|h| < \varepsilon\sqrt{1-b^2}$.

Man vergleiche damit die weniger scharfe Abschätzung in § 10, (13), wo die Quadratwurzel noch mit dem Zahlenfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ behaftet war.

Analog verhält sich $\arccos x$.

4. $\operatorname{arctg} x$.

Da $\operatorname{arctg} x$, wie $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ für jeden endlichen Wert von x stetig sind, und in irgend einem Intervalle (a, b) $\frac{1}{1+x^2}$ höchstens den Wert Eins erreichen kann, so hat man:

$$|\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x| \leqq |h|, \tag{6}$$

und es ist $|h| < \varepsilon$ zu nehmen. Die in § 10, (15) erhaltene Regel: $|h| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ war weniger genau.

Analog verhält sich $\operatorname{arccotg} x$.

5. a^x (a positiv, $\gtrless 1$).

Sowohl a^x, wie $(a^x)' = a^x l a$ sind für jeden endlichen Wert von x stetig. Es sei zuerst ein Intervall $(0, b)$ $(b > 0)$ vorgelegt. Es nimmt dann a^x seinen grössten Wert a^b resp. $a^0 = 1$ für $x = b$ resp. $x = 0$ an, je nachdem $a > 1$ oder < 1 ist. Somit wird:

$$\begin{cases} |a^{x+h} - a^x| \leqq |h|\, a^b l a \ (a > 1) \\ |a^{x+h} - a^x| \leqq |h|\, |l a| \ \ (a < 1), \end{cases} (b > 0), \tag{7}$$

nithin $|h|$, je nachdem $a > 1$ oder $a < 1$, $< \frac{\varepsilon}{a^b la}$ oder $< \frac{\varepsilon}{|la|}$ zu wählen. Ist dagegen b negativ, so vertauschen sich offenbar beide Fälle:

$$(8) \qquad \begin{cases} |a^{x+h} - a^x| \leqq |h|\, a^b\, |la| & (a < 1) \\ |a^{x+h} - a^x| \leqq |h|\, la & (a > 1), \end{cases} \quad (b < 0).$$

Die in § 12 unter (44), (45) erhaltene Doppelregel ist im ersten Falle weniger genau, da ε daselbst noch mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ versehen erscheint. Genau die entsprechende Bemerkung gilt, wie die gleich folgende Formel (9) zeigt, für die damals, § 9, unter (48), (55) aufgestellte Regel für $\lg^a x$, wo im zweiten Falle ε noch den Faktor $\frac{1}{2}$ aufweist.

Für $a = e$ ist la durch 1 zu ersetzen.

6. $\lg^a x$ (a positiv, x positiv).

Für jeden positiven, endlichen Wert (> 0) von x sind $\lg^a x$ und $(\lg^a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{la}$ stetig. Für ein Intervall (α, β), wo α, β positiv, $\alpha < \beta$, hat $\frac{1}{x}$ seinen grössten Wert in $x = \alpha$, demnach wird:

$$(9) \qquad |\lg^a(x+h) - \lg^a x| \leqq |h|\, \frac{1}{\alpha}\, \frac{1}{|la|};$$

soll die linke Seite $< \varepsilon$ werden, so nehme man $|h| < \varepsilon \alpha\, |la|$. Siehe die soeben am Schlusse von 5. gemachte Bemerkung.

Für $a = e$ ist wiederum la durch 1 zu ersetzen.

7. x^n (x positiv, $\gtrless 1$).

Da $(x^n)' = n x^{n-1}$, so sind die Fälle $n \geqq 1$ und $n < 1$ zu unterscheiden. Im ersten Falle, $n \geqq 1$, sind x^n und x^{n-1} für jedes $x \geqq 0$ stetig. In einem Intervalle (a, b) $(a < b, a \geqq 0)$ tritt der grösste Wert von x^{n-1} für $x = b$ ein, und es kommt:

$$(10) \qquad |(x+h)^n - x^n| \leqq |h|\, n b^{n-1} \quad (n \geqq 1).$$

Im zweiten Falle $x > 0$, $n < 1$, $n - 1$ also negativ, tritt dagegen wieder eine Vertauschung derart ein, dass für ein Intervall (a, b) $(a < b,\ a > 0)$:

$$(11) \qquad |(x+h)^n - x^n| \leqq |h|\, |n|\, a^{n-1} \quad (n < 1).$$

Soll also die linke Seite einer der zwei Ungleichungen (10), (11) unter ε heruntersinken, so hat man jenachdem $|h| < \frac{\varepsilon}{nb^{n-1}}$ oder $|h| < \frac{\varepsilon}{|n|\, a^{n-1}}$ zu nehmen. Für $n = 0$ hat in (11) nur das Gleichheitszeichen Giltigkeit; in der That ist dann $x^0 = 1$, und die Differenz einer Konstanten ist stets gleich Null.

8. Ganze Funktion:

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n.$$

Es ist:

$$G'(\xi) = G'(x + \vartheta h)\,(0 < \vartheta < 1) = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \ldots + na_n\xi^{n-1}. \tag{12}$$

Der absolute Wert von $G'(\xi)$ wird vergrössert oder mindestens nicht verkleinert, wenn man alle Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch ihre absoluten Beträge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und ξ durch seinen absoluten Betrag ϱ ersetzt:

$$|G'(\xi)| \leqq a_1 + 2a_2\varrho + 3a_3\varrho^2 + \ldots + na_n\varrho^{n-1}. \tag{13}$$

Liegt jetzt ein Intervall (a, b) vor, dem x und $x + h$ angehören sollen, so sei der nicht kleinere der beiden Absolutwerte $|a|$, $|b|$ mit β bezeichnet, dann ist $\beta \geqq \varrho$, und man hat um so mehr:

$$|G'(\xi)| \leqq a_1 + 2a_2\beta + 3a_3\beta^2 + \ldots + na_n\beta^{n-1}. \tag{14}$$

Soll also die linke Seite von:

$$|G(x + h) - G(x)| = |h|\,|G'(\xi)| \tag{15}$$

für das ganze Intervall $(a, b) < \eta$ werden, so hat man nur

$$|h| < \frac{\eta}{a_1 + 2a_2\beta + 3a_3\beta^2 + \ldots + na_n\beta^{n-1}} \tag{16}$$

zu nehmen:

„Soll $|G(x + h) - G(x)|$, d. i. der absolute Wert der Differenz einer ganzen Funktion $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, wo x und $x + h$ einem vorgelegten Intervalle (a, b) angehören, für das ganze Intervall unter eine beliebig klein vorgegebene (positive) Grösse η heruntergedrückt werden, so wähle man $|h|$ kleiner als einen Bruch, dessen

Zähler η ist und dessen Nenner aus $G'(x)$ hervorgeht, indem man die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch ihre absoluten Beträge und x durch den nicht kleineren der beiden absoluten Beträge von a, b ersetzt."

Man vergleiche mit dieser Stetigkeitsabmessung die weniger einfach ausführbare des § 8.

§ 17. Unbestimmtheitswerte.

Es kommt häufig vor, dass in einem Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zweier Funktionen von x Zähler und Nenner gleichzeitig gegen Null konvergieren, wenn das Argument x gegen einen gewissen Wert a — der als ein „kritischer" bezeichnet werde — konvergiert; man sucht den Grenzwert G von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ — falls er überhaupt existiert — für $\lim x = a$, d. h. den Grenzwert $\lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$. Man bedient sich dann des Ausdruckes, der Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nehme „für $x = a$" die „Unbestimmtheitsform $\frac{0}{0}$" an.

Ein erstes Beispiel hierfür begegnete uns schon in § 2, S. 28 bei $\frac{k^{m+1}-1}{k-1}$ für $\lim k = 1$, wo der Grenzwert $m+1$ herauskam; ein zweites Beispiel in § 5 (I) bei $\frac{\sin x}{x}$ für $\lim x = 0$, wo der bestimmte Grenzwert 1, endlich ein drittes Beispiel in § 12 (IV) bei $\frac{a^x - 1}{x}$ für $\lim x = 0$, wo der bestimmte Grenzwert la resultierte.

Aber auch jeder Differentialquotient lässt sich der vorliegenden Fragestellung unterordnen, denn sobald eine Funktion $f(x)$ für einen Wert x des Argumentes stetig ist, konvergieren $f(x+h) - f(x)$ und h, d. h. Zähler und Nenner des Differenzenquotienten von $f(x)$ gleichzeitig gegen Null.

Es lässt sich daher erwarten, dass auch in dem allgemeinen Falle der Grenzwert von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $\lim x = a$, wenn

$\lim_{x=a} f(x) = 0$, $\lim_{x=a} \varphi(x) = 0$ — oder, wie wir kürzer schreiben, der Grenzwert $\left\{\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right\}_{x=a}$ — da die Regeln der gewöhnlichen Arithmetik hier versagen, durch Differentiationsprozesse bestimmbar sein wird.

Es seien $f(x)$, $\varphi(x)$ nebst ihren ersten Differentialquotienten für ein Intervall $(a, a+h)$, wo man h bereits genügend klein gewählt denken mag — oder, wie man sich dann ausdrückt, „an der Stelle“ $x = a$ — stetig, so liefert der Mittelwertsatz (§ 15 (III)):

$$(1) \qquad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a+\vartheta h), & 0 < \vartheta < 1, \\ \varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a+\vartheta_1 h), & 0 < \vartheta_1 < 1, \end{cases}$$

also, da nach Voraussetzung im vorliegenden Falle:

$$(2) \qquad f(a) = 0, \quad \varphi(a) = 0,$$

wie klein auch h gewählt werde:

$$(3) \qquad \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a+\vartheta h)}{\varphi'(a+\vartheta_1 h)}.$$

Für ein beliebig abnehmendes h konvergiert aber die rechte Seite von (3) gegen den Grenzwert $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ — falls dieser überhaupt existiert — die linke Seite dagegen gegen den gesuchten Grenzwert G:

$$(4) \qquad G = \left\{\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right\}_{x=a} = \lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Somit ergiebt sich die Regel I:

I. „Wenn Zähler und Nenner eines Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $\lim x = a$ gleichzeitig gegen den Wert Null konvergieren, so wird der Grenzwert $\lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ durch den Quotienten $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \lim_{h=0} \frac{f'(a+h)}{\varphi'(a+h)}$ angegeben; vorausgesetzt wird hierbei, dass f und φ nebst ihren ersten Ableitungen an der

Stelle $x = a$ eindeutig bestimmt und stetig sind und $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ einen bestimmten Grenzwert repräsentiert, dass also im besonderen nicht etwa $f'(a)$ und $\varphi'(a)$ gleichzeitig verschwinden.

Tritt dagegen der letztere Fall ein, so hat man das Verfahren fortzusetzen: sind dann die m^{ten} Ableitungen von f und φ die ersten, die für $\lim x = a$ nicht gleichzeitig verschwinden, so wird $G = \lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \lim \frac{f^{(m)}(a+h)}{\varphi^{(m)}(a+h)} = \frac{f^{(m)}(a)}{\varphi^{(m)}(a)}$, falls letzterer Grenzwert bestimmt ist und f und φ nebst ihren m ersten Ableitungen an der Stelle $x = a$ eindeutig bestimmt und stetig sind.

Ist im besonderen $\lim f^{(m)}(a) = 0$, $\lim \varphi^{(m)}(a) \neq 0$, so ist der fragliche Grenzwert gleich Null; ist dagegen umgekehrt $\lim \varphi^{(m)}(a) = 0$, $\lim f^{(m)}(a) \neq 0$, so ist der fragliche Grenzwert gleich Unendlich."

Eine zweite Unbestimmtheitsform, „$\frac{\infty}{\infty}$", tritt für einen Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ein, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ für einen „kritischen" Wert $x = a$ gleichzeitig unendlich gross werden:

(5) $$f(a) = \infty, \quad \varphi(a) = \infty.$$

Man wird versuchen, diesen Fall auf den obigen zurückzuführen. Als Ansatz dazu bietet sich unmittelbar die Einführung der Hilfsfunktionen:

(6) $$\Phi(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad F(x) = \frac{1}{\varphi(x)},$$

indem man schreibt:

(7) $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{F(x)}{\Phi(x)},$$

so dass die Voraussetzung (5) die Gestalt annimmt:

$$F(a) = 0, \quad \Phi(a) = 0. \tag{8}$$

Indem wir ausdrücklich voraussetzen, dass der gesuchte Grenzwert $G = \lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ eindeutig existiert, kommt gemäss I:

$$G = \lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \lim_{h=0} \frac{F(a+h)}{\Phi(a+h)} = \frac{F'(a)}{\Phi'(a)} = \frac{\frac{-\varphi'(a)}{\varphi^2(a)}}{\frac{-f'(a)}{f^2(a)}} \tag{9}$$

$$= \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} \cdot \frac{f^2(a)}{\varphi^2(a)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} \cdot G^2.$$

Somit ergiebt sich für den unbekannten Wert G die quadratische Gleichung:

$$G^2 \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} - G \equiv G\left\{ G \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} - 1 \right\} = 0. \tag{10}$$

Falls demnach $\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}$ einen bestimmten Wert darstellt, also insbesondere weder die Form $\frac{0}{0}$, noch die Form $\frac{\infty}{\infty}$ aufweist, so lässt (10) noch zwei Möglichkeiten zu: entweder besitzt G den Wert Null oder aber den Wert $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

Um hierüber zu entscheiden, schlage man das nämliche Verfahren für den reziproken Quotienten $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ein, der ja für $x = a$ gleichfalls die Unbestimmtheitsform $\frac{\infty}{\infty}$ hat. Dann gelangt man analog zu der, (10) entsprechenden Gleichung:

$$\frac{1}{G}\left\{ \frac{1}{G} \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} - 1 \right\} = 0, \tag{11}$$

d. h. entweder ist $G = \infty$ oder wiederum $= \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$.

Da aber der nach Voraussetzung als eindeutig existierende Grenzwert G nicht zugleich*) Null und Unendlich sein kann, so bleibt nur die andere Möglichkeit:

---

*) Überdies könnte man, ähnlich wie im Texte, zeigen, dass — *bei Ausschluss* der Möglichkeit (12) — G jeden beliebig vorgegebenen *Wert* anzunehmen im stande wäre.

$$G = \lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}. \tag{12}$$

Sollte aber auf der rechten Seite von (12) abermals eine der Unbestimmtsformen $\frac{0}{0}$ resp. $\frac{\infty}{\infty}$ auftreten, so hätte man das Verfahren zu wiederholen, und es ergiebt sich so die Regel:

II. „Wenn für $f(a) = \infty$, $\varphi(a) = \infty$ $\lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$ sich einem bestimmten Grenzwert nähert, so ist er nach Massgabe der Regel I aufzusuchen, d. h. man differenziere ein- resp. mehreremal (aber gleich oft) $f(x)$ und $\varphi(x)$ und bilde für $x = a$ den Quotienten der so entstehenden Ableitungen."

Zwei weitere Unbestimmtheitsformen „$\infty - \infty$" und „$0 \cdot \infty$" werden auf die Regel I resp. II zurückgeführt.

Denn soll der Grenzwert der Differenz $\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\chi(x)}$ für $x = a$ ermittelt werden, falls $\psi(a) = 0$, $\chi(a) = 0$, so liefert das Heraufmultiplizieren der Nenner:

$$\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\chi(x)} = \frac{\chi(x) - \psi(x)}{\psi(x)\,\chi(x)}, \tag{13}$$

d. h. einen Quotienten, der für $x = a$ die Unbestimmtheitsform $\frac{0}{0}$ hat. Hat man andererseits ein Produkt $\psi(x)\,\chi(x)$, wo für $x = a$ ψ verschwindet, χ aber unendlich gross wird, so schreibe man je nachdem:

$$\psi(x)\,\chi(x) = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\chi(x)}} = \frac{\chi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}, \tag{14}$$

dann resultiert für $x = a$ die Unbestimmtheitsform $\frac{0}{0}$ resp. $\frac{\infty}{\infty}$:

III. „Die Unbestimmtheitsformen $\infty - \infty$, *$0 \cdot \infty$ werden unmittelbar auf die Fälle I resp. II zurückgeführt.*"

Eine weitere Gattung von Unbestimmtheitsformen liefert die Potenzbildung. Es liege eine Potenz*) $f(x)^{\varphi(x)}$ vor, so können für einen Wert $x = a$ drei kritische Fälle eintreten, die sich der elementaren Potenzlehre entziehen:

$$\text{a)}\quad f(a) = 0, \quad \varphi(a) = 0,$$
$$\text{b)}\quad f(a) = \infty, \quad \varphi(a) = 0,$$
$$\text{c)}\quad f(a) = 1, \quad \varphi(a) = \infty.$$

Man bediene sich dann der nämlichen Methode, die in § 14 unter 73. zur Aufsuchung des Differentialquotienten einer Funktion von der Gestalt $f(x)^{\varphi(x)}$ führte; man setze:

$$f(x)^{\varphi(x)} = e^{l\{f(x)^{\varphi(x)}\}} = e^{\varphi(x)\, lf(x)},$$

so kommt:

$$\lim_{h=0} f(a+h)^{\varphi(a+h)} = e^{\lim\limits_{h=0}\{\varphi(a+h)\, lf(a+h)\}}, \tag{15}$$

und da der Logarithmus einer (positiven) Grösse, die den Grenzwert Null resp. Unendlich hat, selbst (negativ resp. positiv) unendlich gross wird, so subsumieren sich alle drei Fälle *a*) *b*) *c*) der Unbestimmtsform $0 \cdot \infty$ (oder $\infty \cdot 0$) und damit der Regel III:

> IV. „Der Grenzwert einer Potenz $f(x)^{\varphi(x)}$ in den drei kritischen Fällen: *a*) $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$; *b*) $f(a) = \infty$, $\varphi(a) = 0$; *c*) $f(a) = 1$, $\varphi(a) = \infty$, — wo die Konverganz gegen 0 resp. ∞ stets von der positiven Seite her erfolge — führt gemäss (15) auf die Unbestimmtheitsform $0 \cdot \infty$ und ist daher nach Regel III zu behandeln.“**)

---

*) Wie bisher wird an der Beschränkung festgehalten, dass die Basis einer Potenz positiv sei, dass also hier $f(x)$ für $\lim x = a$ von der positiven Seite her gegen Null resp. Unendlich konvergiert. Da weiter der Fall eines negativen $\varphi(x)$ sofort wegen $f^{-\varphi} = \frac{1}{f^{\varphi}}$ auf ein positives $\varphi(x)$ zurückkommen würde, können wir uns auch auf ein positives $\varphi(x)$ beschränken.

**) Der scheinbar ebenfalls unbestimmte Wert, wenn $f(a) = 0$, $\varphi(a) = \infty$, erledigt sich gemäss (15) sofort dadurch, dass die Potenz *dann die Form* $e^{\pm\infty \cdot (-\infty)}$ annimmt, also den Grenzwert 0 resp. ∞ *erhält, je nachdem* $\varphi(a)$ positiv oder negativ unendlich gross wird.

Eine Reihe von Beispielen möge zur Illustration und weiteren Ausführung der Regeln I bis IV dienen.

Beispiele zu I. Formen $\frac{0}{0}$.

(1) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = \left\{\frac{(\sin x)'}{x'}\right\}_{x=0} = \left(\frac{\cos x}{1}\right)_{x=0} = 1$ (s. § 5 (I)).

(2) $\left(\frac{a^x - 1}{x}\right)_{x=0} = \left\{\frac{(a^x - 1)'}{x'}\right\}_{x=0} = \left\{\frac{a^x la}{1}\right\}_{x=0} = la$

(s. § 12 (IV)).

(3) $\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}_{h=0}$ (s. § 8 (V));

nach der Regel der Funktionen von Funktionen (§ 13 I) ist der Differentialquotient von $f(x+h) - f(x)$ nach h, wenn $x + h$ für den Augenblick als eine Zwischenvariable u eingeführt wird, da $\frac{du}{dh} = 1$, gleich $\frac{df(u)}{du} = f'(u) = f'(x+h)$. Also kommt:

$$\left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}_{h=0} = \left\{\frac{f'(x+h)}{h'}\right\}_{h=0} = f'(x),$$

wie es nach der Definition des Differentialquotienten sein muss.

(4) $$\left(\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}\right)_{x=a} = \left(\frac{3x^2}{2x}\right)_{x=a} = \frac{3}{2}a.$$

Hiervon kann man sich auch auf elementarem Wege überzeugen. Denn nach der Formel für die Summe der geometrischen Reihe in der Gestalt § 6 (3) wird:

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2), \quad x^2 - a^2 = (x-a)(x+a),$$

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \frac{x^2 + xa + a^2}{x + a}.$$

Nunmehr kann man direkt x gegen a konvergieren lassen, und erhält für den Grenzwert:

$$\frac{a^2 + a^2 + a^2}{a + a} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a.$$

Analog ist das allgemeinere Beispiel $\left(\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}\right)_{x=a}$ zu behandeln.

Es kommt:

$$\left(\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}\right)_{x=a} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

Im besonderen also für $n = 1$, $a = 1$ ergiebt sich der Grenzwert m, wie schon in § 2 S. 28 gefunden. Die dort angegebene elementare Methode würde auch, wie leicht zu zeigen, für die Behandlung des allgemeineren Falles $\left(\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}\right)_{x=a}$ ausreichen.

(5) $$\left(\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\sin x}{2 \sin x \cos x}\right)_{x=0} = \left(\frac{1}{2 \cos x}\right)_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Auch hier kann man auf elementar-trigonometrischem Wege zu dem nämlichen Ergebnis gelangen. Die Einführung des halben Winkels $\frac{x}{2}$ liefert:

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}},$$

mithin für $\lim x = 0$:

$$\left(\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}\right)_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

(6) $$\left(\frac{x}{e^x - e^{-x}}\right)_{x=0} = \left(\frac{1}{e^x + e^{-x}}\right)_{x=0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(7) $$\left(\frac{x e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}\right)_{x=0} = \left(\frac{-x e^{\cos x} \sin x + e^{\cos x}}{-\cos x + \sin x}\right)_{x=0}$$

$$= \frac{e}{-1} = -e.$$

(8) $$\left(\frac{lx}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)_{x=1} = \left\{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}\right\}_{x=1} = \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}\right)_{x=1} = 0.$$

$$(9) \qquad \left(\frac{l\cos x}{x}\right)_{x=0} = \left(\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{1}\right)_{x=0} = 0.$$

Folgende Beispiele zeigen die Notwendigkeit einer wiederholten Differentiation.

$$(10) \quad \left(\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{2x^3 - 3ax^2 + a^3}\right)_{x=a} = \left(\frac{3x^2 - 2ax - a^2}{6x^2 - 6ax}\right)_{x=a}$$
$$= \left(\frac{6x - 2a}{12x - 6a}\right)_{x=a} = \frac{4a}{6a} = \frac{2}{3}.$$

$$(11) \quad \left(\frac{\sin 2x - 2\sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}\right)_{x=0} = \left(\frac{2\cos 2x - 2\cos x}{2e^x - 2x - 2}\right)_{x=0}$$
$$= \left(\frac{-4\sin 2x + 2\sin x}{2e^x - 2}\right)_{x=0}$$
$$= \left(\frac{-8\cos 2x + 2\cos x}{2e^x}\right)_{x=0}$$
$$= \left(\frac{-8+2}{2}\right) = -3.$$

Beispiele zu II. Formen $\frac{\infty}{\infty}$.

$$(12) \qquad \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}}.$$

Da:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{\cot 3x}{\cot x},$$

so liegt nur eine andere Schreibweise, oder wenn man will, eine künstliche Umgestaltung der Unbestimmtheitsform $\frac{0}{0}$ vor, und die Regel I liefert direkt:

$$\left(\frac{\cot 3x}{\cot x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = \left\{\frac{-\frac{3}{\sin^2 3x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right\}_{x=\frac{\pi}{2}} = 3\left(\frac{\sin x}{\sin 3x}\right)^2_{x=\frac{\pi}{2}} = 3\cdot(-1)^2 = 3.$$

Die nämliche Erscheinung bietet sich dar bei:

$$(13)\quad \left(\frac{\frac{\pi}{x}}{\cot\frac{x\pi}{2}}\right)_{x=0} = \pi\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x\pi}{2}}{x}\right)_{x=0} = \pi\left\{\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x\pi}{2}}}{1}\right\}_{x=0}$$
$$= \pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ganz anders dagegen verhält es sich bei dem wichtigen Beispiele:

$$(14)\qquad \left(\frac{e^x}{x}\right)_{x=\infty}.$$

Zunächst ist es ein wesentlicher Unterschied, ob x positiv oder negativ ins Unendliche wächst. Im letzteren Falle setze man $x = -u$, dann wird $\frac{e^x}{x} = \frac{e^{-u}}{-u} = -\frac{1}{ue^u}$ und man sieht, dass diese Funktion für ein positives, stets wachsendes u unter jede Grenze sinkt.

Es kommt also hier nur der andere Fall in Betracht, dass x positiv unendlich gross wird. Man verstehe unter $x = \omega$ irgend einen beliebig, aber fest gewählten, wenn auch noch so grossen (positiven) Wert von x, und unter $n+1$ die nächst höhere natürliche Zahl. Dann liefert die Reihenentwickelung (Va) des § 12 für e^x:

$$e^\omega = 1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

$$R_n < \frac{\omega^n}{n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega}{n+1}}.$$

Somit ergiebt sich durch Unterdrückung des positiven Restes R_n die Ungleichung:

$$e^\omega > 1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}$$

und nach Division mit ω:

$$\frac{e^\omega}{\omega} > \frac{1}{\omega} + 1 + \frac{\omega}{2!} + \ldots + \frac{\omega^{n-2}}{(n-1)!}.$$

Hier ist die rechte Seite ein Aggregat von lauter positiven Grössen, von denen bereits $\frac{\omega}{2}$ bei wachsendem ω jeden, beliebig vorgegebenen, noch so grossen Wert überschreitet. Um so mehr gilt also dasselbe für die linke Seite, mit anderen Worten, es ist, wenn ein beliebig Grosswerden eines positiven x mit $x = +\infty$ bezeichnet wird:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty. \tag{14}$$

Damit ist nicht nur die Existenz des Grenzwertes $\left(\frac{e^x}{x}\right)_{x=\infty}$ dargethan, sondern auch der letztere selbst ermittelt. Als Kontrolle kann man hinterher die Regel II heranziehen:

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)_{x=+\infty} = \left\{\frac{(e^x)'}{x'}\right\}_{x=+\infty} = \left(\frac{e^x}{1}\right)_{x=+\infty} = +\infty.$$

Der oben auf Grund der Reihenentwickelung von e^x gegebene Beweis bleibt offenbar auch für die Untersuchung von $\left(\frac{e^x}{x^\mu}\right)_{x=+\infty}$ gültig, wenn μ einen positiven Exponenten bedeutet, es kommt analog:

$$\left(\frac{e^x}{x^\mu}\right)_{x=+\infty} = +\infty. \tag{14a}$$

Auch die Kontrolle lässt sich auf Grund von II in derselben Art durchführen: denn ist μ eine natürliche Zahl $= m$, so erhält man nach m-maliger Differentiation:

$$\left(\frac{e^x}{x^m}\right)_{x=+\infty} = \left\{\frac{(e^x)^{(m)}}{(x^m)^{(m)}}\right\}_{x=+\infty} = \frac{1}{m!}(e^x)_{x=+\infty} = +\infty.$$

Ist dagegen μ nicht eine natürliche Zahl, sondern zwischen den beiden natürlichen Zahlen $m-1$ und m (inkl. 1) enthalten, so liefert m-maliges Differenzieren:

$$\left(\frac{e^x}{x^\mu}\right)_{x=+\infty} = \left\{\frac{(e^x)^{(m)}}{(x^\mu)^{(m)}}\right\}_{x=+\infty} = \frac{1}{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+1)}\left(\frac{e^x}{x^{\mu-m}}\right)_{x=+\infty}$$

$$= \frac{1}{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+1)}(e^x x^{m-\mu})_{x=+\infty},$$

und da jetzt $m - \mu$ ein positiver Exponent ist, resultiert in der That der Grenzwert $+\infty$.

Man kann das Ergebnis auch dahin ausdrücken, dass für ein ins Unendliche wachsendes positives x die Funktion e^x unendlich viel stärker (positiv) unendlich wird, als eine Potenz x^μ mit beliebig, aber fest gewähltem, positivem Exponenten.

Das Ergebnis (14) resp. (14a) kann dazu dienen, um zwei weitere wichtige Grenzwerte zu ermitteln, die durch Einführung der Umkehrung der Exponentionalfunktion entstehen. Das ist erstens:

$$\left(\frac{x}{lx}\right)_{x=+\infty}. \tag{15}$$

Man setze $lx = u$, also $x = e^u$, so wird $\frac{x}{lx} = \frac{e^u}{u}$, und auf Grund von (14) kommt unmittelbar:

$$\left(\frac{x}{lx}\right)_{x=+\infty} = \left(\frac{e^u}{u}\right)_{x=+\infty} = +\infty. \tag{15}$$

Allgemeiner, wenn $\left(\frac{x^\mu}{lx}\right)_{x=+\infty}$ $(\mu > 0)$ bestimmt werden soll, so setze man:

$$\frac{x^\mu}{lx} = \frac{\mu x^\mu}{\mu lx} = \frac{\mu x^\mu}{l(x^\mu)},$$

und führt man hier $x^\mu = v$ als unabhängige Variable ein, so kommt man direkt auf (15) zurück, also wird:

$$\left(\frac{x^\mu}{lx}\right)_{x=+\infty} = +\infty \,(\mu > 0), \tag{15a}$$

oder auch:

$$\left(\frac{lx}{x^\mu}\right)_{x=+\infty} = 0 \,(\mu > 0), \tag{15b}$$

in Worten: Der Logarithmus einer positiv ins Unendliche wachsenden Grösse x wird unendlich schwächer (positiv) unendlich als eine Potenz x^μ mit beliebig, aber fest gewähltem, positivem Exponenten.

Die Kontrolle von (15) gemäss Regel II giebt sofort:

$$\left(\frac{x}{lx}\right)_{x=+\infty} = \left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)_{x=+\infty} = +\infty.$$

Zweitens werde vorgelegt:

$$(16) \qquad \left(\frac{lx}{\frac{1}{x}}\right)_{x=0} .$$

Man denke sich das positive x bereits < 1 und setze $lx = -u$, d. h. $x = e^{-u}$, so konvergiert u mit positiv gegen Null abnehmendem x positiv gegen Unendlich. Damit geht (16) über in:

$$(16) \qquad \left(\frac{-u}{e^u}\right)_{u=+\infty} = 0,$$

gemäss (14).

Beispiele für III. A. Formen $\infty - \infty$.

$$(17) \qquad \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{lx}\right)_{x=1} = \left\{\frac{lx-(x-1)}{(x-1)\,lx}\right\}_{x=1} = \left\{\frac{\frac{1}{x}-1}{(x-1)\frac{1}{x}+lx}\right\}_{x=1}$$

und nach nochmaliger Differentiation:

$$= \left\{\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}\right\}_{x=1} = \left\{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}\right\}_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

$$(18) \qquad \left\{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{l(1-x)}\right\}_{x=0} = \left\{\frac{l(1-x)+\sin x}{\sin x\, l(1-x)}\right\}_{x=0} = \left\{\frac{-\frac{1}{1-x}+\cos x}{-\frac{\sin x}{1-x}+l(1-x)\cos x}\right\}_{x=0}$$

und nach nochmaliger Differentiation:

$$= \left\{ \frac{-\frac{1}{(1-x)^2} - \sin x}{-\frac{\sin x}{(1-x)^2} - \frac{\cos x}{1-x} - \frac{\cos x}{1-x} - l(1-x)\sin x} \right\}_{x=1}$$

$$= \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}.$$

B. Formen $0 \cdot \infty$.

$$(19) \quad \left(\frac{1}{e^x - 1} \cdot la^x\right)_{x=0} = \left(\frac{la^x}{e^x - 1}\right)_{x=0} = \left(\frac{\frac{1}{a^x} \cdot a^x la}{e^x}\right)_{x=0} = la$$

$$(20) \quad \left\{ x\, l\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right\}_{x=\infty}.$$

Man führe hier $u = \frac{1}{x}$ ein, so geht (20) über in:

$$\left(\frac{l(1+u)}{u}\right)_{u=0} = \left(\frac{\frac{1}{1+u}}{1}\right)_{u=0} = 1.$$

$$(21) \quad \left\{ (1-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}x \right\}_{x=1} = \left(\frac{1-x}{\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{2}x}\right)_{x=1}$$

$$= \left\{ \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}x}} \right\}_{x=1} = \frac{2}{\pi}.$$

$$\left\{ \arcsin\frac{x-a}{a}\,\mathrm{cotg}\,(x-a) \right\}_{x=a} = \frac{\arcsin\frac{x-a}{a}}{\mathrm{tg}\,(x-a)}$$

$$(22) \quad = \left\{ \frac{\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}}{\frac{1}{\cos^2(x-a)}} \right\}_{x=a} = \frac{1}{a}$$

$$(23)\qquad \{(1-\sin x)\operatorname{tg} x\}_{x=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1-\sin x}{\operatorname{cotg} x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = \left\{\frac{-\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right\}_{x=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$(24)\qquad (x\,lx)_{x=0}.$$

Da $x\,lx = \dfrac{lx}{\frac{1}{x}}$, so liefert (16) den Grenzwert Null.

Beispiele zu IV.

$$(25)\qquad \left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}_{x=\infty} = e^{\left[l\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}\right]_{x=\infty}} = e^{\left[x\,l\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_{x=\infty}}.$$

Da der im Exponenten von e stehende Grenzwert nach (20) den Wert 1 besitzt, so ergiebt sich:

$$(25)\qquad \left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}_{x=\infty} = e,$$

in Übereinstimmung mit § 12 (l), S. 126.

$$(26)\qquad (x^x)_{x=0} = e^{\{l(x^x)\}_{x=0}} = e^{(x\,lx)_{x=0}} = 1,$$

da der Grenzwert der Exponenten von e gemäss (24) gleich Null ist.

Es stellt sich demnach das Ergebnis heraus, dass der Satz II des § 1, wonach a^x $(a>0)$ mit gegen Null abnehmendem Exponenten gegen 1 konvergiert, gültig bleibt, wenn auch die Basis a selbst, genau so wie der Exponent, gegen Null konvergiert.

$$(27)\qquad \left(x^{\frac{1}{x}}\right)_{x=+\infty} = e^{\left\{l\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right\}_{x=+\infty}} = e^{\left(\frac{lx}{x}\right)_{x=+\infty}} = 1,$$

da der Grenzwert des Exponenten von e nach (15) gleich Null ist.

Der Fall (27) ist aber auch direkt auf (26) zurückführbar, wenn man $x = \dfrac{1}{u}$ setzt. Dann wird:

$$x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{u}\right)^{u} = \frac{1}{u^u},$$

mithin:

$$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)_{x=+\infty} = \frac{1}{(u^u)_{u=0}} = 1.$$

§ 18. Maxima und Minima von Funktionen einer Variabeln.

Es sei $f(x)$ eine — wenigstens in einem gewissen Intervalle, auf das sich die Betrachtung beschränken soll — stetige Funktion von x, und a eine beliebige Stelle des Intervalles. Auf beiden Seiten von a denke man sich ein genügend kleines Teilintervall von der Länge ε abgegrenzt: das Intervall von $a-\varepsilon$ bis $a+\varepsilon$ heisse die „Umgebung" oder die „Nachbarschaft" der Stelle a. Während sich die Variable x von $a-\varepsilon$ über a bis $a+\varepsilon$ stetig verändert, wird die Funktion $f(x)$, falls nur ε hinreichend klein gewählt ist, im allgemeinen, d. h. wenn a keine Ausnahmestelle ist, entweder im Zunehmen oder aber im Abnehmen begriffen sein; die beiden Differenzen $f(a)-f(a-\varepsilon)$ und $f(a)-f(a+\varepsilon)$ werden also Werte von entgegengesetztem Vorzeichen („ungleichnamige" Werte) sein. Man sagt dann, dass die Zunahme resp. Abnahme von $f(x)$ „an der Stelle" a stattfinde. Im besonderen kann jedoch a eine solche Stelle sein — sie heisse dann eine „singuläre" — dass die beiden Differenzen, wie klein auch ε werde, Werte von demselben Vorzeichen („gleichnamige" Werte) darstellen; in diesem Falle sagt man, dass die Funktion für $x=a$ einen „extremen" Wert (ein „Extremum") besitze, und zwar ein „Maximum", wenn das gemeinsame Vorzeichen ein positives, ein „Minimum", wenn es ein negatives ist.*)

Mit anderen Worten, und es entspricht das im wesentlichen der unmittelbaren Auffassung eines grössten resp. kleinsten Wertes, es ist $f(a)$ ein Maximum, wenn $f(x)$ für $x=a$ einen grösseren Wert annimmt, als für Werte x, die sich auf beiden Seiten in unmittelbarer Nachbarschaft von a befinden, und $f(a)$ ist ein Minimum, wenn $f(x)$ für $x=a$

*) Diese Definition des Maximums resp. Minimums genügt bereits bei manchen Aufgaben zur Ermittelung der extremen Werte.

einen kleineren Wert annimmt, als für Nachbarwerte von x. Eine derartige Beschränkung auf die unmittelbare Nachbarschaft von a, d. h. auf Werte $a \pm \varepsilon$, mit einem hinreichend kleinen ε ist für die Definition eines extremen Wertes von $f(x)$ notwendig, da es sehr wohl vorkommen kann, dass eine Funktion von x in einem vorgegebenen Intervalle mehrere, selbst unbegrenzt viele extreme Werte aufweisen kann. Es handelt sich darum, solche extremen Werte einer Funktion durch analytische Kriterien zu charakterisieren.

Zur Vorbereitung wird man vorerst ein Kriterium aufstellen, das die beiden Fälle der Zunahme resp. Abnahme von $f(x)$ an einer nichtsingulären Stelle a zu trennen gestattet.

Es geschieht das am durchsichtigsten wiederum auf Grund des Mittelwertsatzes (§ 15 III). Vorausgesetzt, dass auch $f'(x)$ im Intervalle $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ eindeutig bestimmt und stetig ist, so wird für eine positive Grösse $\delta \leq \varepsilon$:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(a+\delta) - f(a) = \delta f'(a + \vartheta\delta),\ 0 < \vartheta < 1, \\ f(a) - f(a-\delta) = \delta f'(a - \vartheta_1\delta),\ 0 < \vartheta_1 < 1. \end{cases}$$

Soll nun $f(x)$ an der Stelle a im Zunehmen begriffen sein, so müssen die beiden Differenzen linkerhand von (1) positiv sein und es auch bleiben, wie klein man ε wähle, und umgekehrt; mithin müssen auch $f'(a + \vartheta\delta)$ und $f'(a - \vartheta_1\delta)$ positiv sein.

Da aber sowohl $a + \vartheta\delta$ wie $a - \vartheta_1\delta$ für beliebig abnehmendes ε, da $\delta \leq \varepsilon$, gegen a konvergieren, so muss auch der Wert von $f'(a)$ selbst positiv ausfallen. Umgekehrt, wenn $f'(a)$ positiv ist, so muss es in Anbetracht der vorausgesetzten Stetigkeit von $f'(x)$ möglich sein, ein hinreichend kleines Intervall $(a - \delta,\ a + \delta)$ abzugrenzen, so, dass auch innerhalb dieses Intervalles $f'(x)$ positiv bleibt; dann aber sind auch die linken Seiten von (1) positive Werte, und $f(x)$ nimmt an der Stelle a zu.

Genau die analoge Überlegung greift Platz im Falle einer Abnahme von $f(x)$ an der Stelle a; eine solche ist dadurch charakterisiert, dass die linken Seiten von (1) gleichzeitig negative Werte annehmen; das ist wiederum nur so möglich, dass $f'(a)$ negativ ausfällt, und rückwärts schliesst man wiederum von der Negativität von $f'(a)$ auf die der rechten und damit der linken Seiten von (1).

Damit ist das gewünschte Kriterium für die Zuna
resp. Abnahme einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle a
mittelt:

> I. „Eine in der Umgebung einer Stell
> nebst ihrer ersten Ableitung $f'(x)$ stet
> Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = a$ im
> nehmen resp. Abnehmen begriffen, je na
> dem $f'(x)$ einen, von Null verschieden
> positiven resp. negativen Wert besitzt, u
> umgekehrt."

So nimmt beispielsweise die Funktion $\sin x$ im er
Quadranten beständig zu, da daselbst überall $(\sin x') = c$
positiv ist, dagegen im zweiten Quadranten beständig
da daselbst überall $\cos x$ negativ ist.

Ferner nimmt a^x $(a > 0)$ bei wachsendem x stets
resp. ab, je nachdem $(a^x)' = a^x la$, oder, was auf dass
hinauskommt, je nachdem la positiv oder negativ, d. h
nachdem $a > 1$ oder < 1 ist.

Da $(\overset{a}{\lg} x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{la}$, so nimmt für eine Basis $a > 1$
wachsendem (positiven) x $\overset{a}{\lg} x$ stets zu, im besond
also auch der natürliche Logarithmus lx.

Die Regel I lässt es nunmehr als plausibel erschei
dass $f(x)$ an der Stelle $x = a$ nur dann einen extre
Wert besitzen wird, wenn $f'(a) = 0$ ist. In der That mü
unter der Voraussetzung eines extremen Wertes $f(a)$
linken, also auch die rechten Seiten von (1) ungleichna
sein, mithin auch $f'(a + \vartheta\delta)$ und $f'(a - \vartheta_1\delta)$, wie k
auch δ gewählt sei. Da aber nach dem Hilfssatz II
§ 15 die im Intervalle $(a - \delta, a + \delta)$ stetige Funktion f
falls daselbst auch ihre erste Ableitung i. e. $f''(x)$ stetig
mindestens einmal für einen Wert zwischen $a + \vartheta\delta$
$a - \vartheta_1\delta$ verschwinden muss, und ein solcher Wert bei
liebig abnehmendem δ selbst gegen a konvergiert, so
das Verschwinden von $f'(a)$.

Schwieriger ist die Beantwortung der umgekehrten Fr
ob resp. wann das Verschwinden von $f'(a)$ einen extre
Wert von $f(a)$ nach sich zieht, und, wenn das der
ob dieser extreme Wert einem Maximum oder aber ei
Minimum von $f(x)$ zugehört?

Nach der vorausgesetzten Stetigkeit von $f'(x)$ und $f''(x)$ im Intervalle $(a - \delta,\ a + \delta)$ ist, wiederum auf Grund des Mittelwertsatzes:

$$(2)\quad \begin{aligned} f'(a + \vartheta\delta) &= f'(a) + \vartheta\delta f''(a + \vartheta_2\vartheta\delta),\ (0 < \vartheta_2 < 1),\\ f'(a - \vartheta_1\delta) &= f'(a) - \vartheta_1\delta f''(a - \vartheta_3\vartheta_1\delta),\ (0 < \vartheta_3 < 1). \end{aligned}$$

Es sei jetzt $f'(a) = 0$. Dann geht (1) unter Benutzung von (2) über in:

$$(3)\quad \begin{aligned} f(a + \delta) - f(a) &= \vartheta\delta^2 f''(a + \vartheta_2\vartheta\delta),\\ f(a - \delta) - f(a) &= \vartheta_1\delta^2 f''(a - \vartheta_3\vartheta_1\delta). \end{aligned}$$

Der besondere Fall, dass auch $f''(a) = 0$ ist, bleibe vor der Hand ausgeschlossen. Weist $f(x)$ an der Stelle $x = a$ ein Maximum auf, so müssen die linken, also auch die rechten Seiten von (3), somit auch $f''(a + \vartheta_2\vartheta\delta)$ und $f''(a - \vartheta_3\vartheta_1\delta)$ gleichzeitig negative Werte annehmen, wie klein auch δ sei. Das ist aber wegen der Stetigkeit von $f''(x)$ und, da $f''(a) \neq 0$, nur so möglich, dass $f''(a)$ selbst negativ ausfällt. Genau in derselben Weise erkennt man, dass im Falle eines Minimums $f(a)$ der Wert von $f''(a)$ positiv ausfallen muss.

Diese Schlüsse sind wieder umkehrbar. Ist $f''(a)$ negativ, so muss sich für ein hinreichend kleines δ ein Intervall $(a - \delta,\ a + \delta)$ abgrenzen lassen, dass innerhalb desselben $f''(x)$, also auch $f''(a + \vartheta_2\vartheta\delta)$, $f''(a - \vartheta_3\vartheta_1\delta)$ negativ bleiben; dann sind aber auch die linken Seiten von (3) negative Werte und es tritt ein Maximum $f(a)$ ein. Genau ebenso schliesst man von einem positiven $f''(a)$ auf ein Minimum $f(a)$. Diese Umkehrungen versagen aber, sobald $f''(a)$ selbst Null ist. Für diesen neuen Ausnahmefall ist das eingeschlagene Verfahren abermals fortzusetzen, und es kommt, auch die Stetigkeit von $f'''(x)$ an der Stelle $x = a$ vorausgesetzt:

$$(4)\quad \begin{aligned} f(a + \delta) - f(a) &= \vartheta_2\vartheta^2\delta^3 f^{(3)}(a + \vartheta_4\vartheta_2\vartheta\delta),\ 0 < \vartheta_4 < 1).\\ f(a) - f(a - \delta) &= \vartheta_3\vartheta_1^2\delta^3 f^{(3)}(a - \vartheta_5\vartheta_3\vartheta_1\delta),\ (0 < \vartheta_5 < 1). \end{aligned}$$

Ist hier $f^{(3)}(a)$ von Null verschieden, so treten die nämlichen Schlüsse ein, wie in dem ursprünglichen Falle, wo $f'(a)$ von Null verschieden war; je nachdem $f^{(3)}(a)$ positiv oder negativ ausfällt, ist $f(x)$ an der Stelle $x = a$ im Zunehmen

resp. Abnehmen begriffen, und man hat es demnach nicht mit einem extremen Werte zu thun.

Ist dagegen auch $f^{(3)}(a) = 0$, und $f^{(4)}(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig, so liefert der Mittelwertsatz die Fortentwickelung von (4):

$$(5)\quad \begin{aligned} f(a+\delta) - f(a) &= \vartheta_4 \vartheta_2^2 \vartheta^3 \delta^4 f^{(4)}(a + \vartheta_6 \vartheta_4 \vartheta_2 \vartheta \delta), \quad (0 < \vartheta_6 < 1), \\ f(a-\delta) - f(a) &= \vartheta_5 \vartheta_3^2 \vartheta_1^3 \delta^4 f^{(4)}(a - \vartheta_7 \vartheta_5 \vartheta_3 \vartheta_1 \delta), \quad (0 < \vartheta_7 < 1) \end{aligned}$$

Für $f^{(4)}(a) \neq 0$ hat der nämliche Schluss Geltung, wie oben bei $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$: je nachdem $f^{(4)}(a)$ negativ oder positiv, tritt für $x = a$ ein Maximum resp. Minimum von $f(x)$ ein.

Ist aber auch $f^{(4)} = 0$, so geht man wiederum in der angezeigten Weise fort u. s. w.; bei jedesmaligem Fortschreiten erhält die rechte Seite der zweiten Gleichung (3), (4), (5) ... ein neues negatives Vorzeichen, oder, wenn man dasselbe auf die linke Seite wirft, so hat die letztere abwechselnd die Gestalt $f(a-\delta) - f(a)$, $f(a) - f(a-\delta)$, $f(a-\delta) - f(a)$ u. s. w.

Hieraus fliesst die allgemeine Regel:

> II. Eine Funktion $f(x)$ sei an der Stelle $x = a$ nebst ihrer ersten und zweiten Ableitung stetig, und $f''(a) \neq 0$. Dann ist das Kriterium für einen extremen Wert von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ das Verschwinden von $f'(a)$, und zwar für ein Maximum bei $f''(a) < 0$, für ein Minimum bei $f''(a) > 0$.
>
> Ist dagegen auch $f''(a) = 0$, so verstehe man unter der n^{ten} Ableitung $f^{(n)}$ die erste in der Reihe der Ableitungen von f, die für $x = a$ nicht verschwindet:
>
> Dann ist für ein gerades n das Kriterium eines extremen Wertes $f(a)$ erfüllt, und zwar für ein Maximum resp. Minimum von f, je nachdem $f^{(n)}(a)$ negativ resp. positiv ausfällt.
>
> Dagegen ist für ein ungerades n das Kriterium für Zunahme resp. Abnahme von f an der Stelle a erfüllt, je nachdem $f^{(n)}(a)$ positiv resp. negativ ist.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass $f(x)$ nebst allen Ableitungen bis zur n^{ten} inkl. an der Stelle $x = a$, d. h. in einer hinreichend kleinen Umgebung von a stetig ist.

Diese Regel möge noch auf den in § 13 behandelten Fall ausgedehnt werden, wo die Funktion f, deren extreme Werte in einem Intervalle gesucht werden, zunächst als Funktion zweier Variabeln x, y erscheint, die selbst wieder von einer dritten Variabeln t abhängen. Es trete aber hier die Beschränkung auf den in den Anwendungen besonders häufig eintretenden Fall ein, dass man von vornherein weiss, dass in einem vorgegebenen Intervalle die Funktion wenigstens ein Maximum resp. Minimum besitzt. Dann weiss man, wie oben betont wurde, dass an der fraglichen Stelle $\frac{df}{dt}$ verschwinden muss; besitzt überdies die Gleichung $\frac{df}{dt} = 0$ innerhalb des Intervalles nur eine einzige Lösung, so ist die Aufgabe erledigt, ohne dass man die zweite Ableitung $\frac{d^2f}{dt^2}$, deren explizite Aufstellung und Untersuchung oft umständlicher ist, zu untersuchen braucht.

Der einfachere Fall ist der, wenn x, y explizite Funktionen von t sind:

$$x = g(t),\ y = h(t); \tag{6}$$

es ist dann nach § 13, IVa:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{7}$$

gleich Null zu setzen.

Nicht ganz so einfach ist der andere, häufiger sich darbietende Fall, wenn y implizite als Funktion von $t = x$ vorliegt, d. h. wenn x, y durch eine Relation verbunden sind:

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{8}$$

Dann ist nach § 13, IVγ:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,y', \\ 0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\,y'. \end{cases} \tag{9}$$

Für den vorausgesetzten extremen Wert von $f(x)$ ist $\frac{df}{dx}$ gleich Null zu setzen; multipliziert man dann die erste Gleichung mit $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, die zweite mit $\frac{\partial f}{\partial y}$ und subtrahiert, so folgt das Verschwinden der Funktionaldeterminante (s. § 13, (63)) von f und φ:

$$f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1 \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

eine Gleichung, die im Verein mit (8), das unbekannte Maximum resp. Minimum von f, als Funktion von x betrachtet, zu finden gestattet.

Es gilt also die Regel*):

> IIa. „Die extremen Werte einer Funktion $f(x, y)$, wo x, y an eine Relation (‚*Nebenbedingung*') (8) $\varphi(x, y) = 0$ gebunden sind, befinden sich unter den gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen $\varphi = 0$, $f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1 = 0$ (10). Besitzt im besonderen $f(x, y)$ innerhalb eines vorgelegten Intervalles wenigstens *ein* Maximum resp. Minimum, und lassen andererseits die Gleichungen $\varphi = 0$, $f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1 = 0$ innerhalb des Intervalles nur *eine* gemeinsame Lösung (x, y) zu, so ist diese die dem fraglichen Maximum resp. Minimum zugehörige."

Man bemerke, dass die Gleichung (10) dieselbe bleibt, auch wenn (8) von der allgemeineren Gestalt ist:

$$\varphi(x, y) = c, \tag{8a}$$

wo c ein gegebener fester Wert ist.

Nun ereignet es sich öfters, dass schon die Gleichung (10) allein die nach Voraussetzung einzige Lösung der Aufgabe liefert; für diesen besonderen Fall kann man folgern, dass diese Lösung zugleich auch die der anderen, parallel laufen-

*) Diese Regel lässt sich mittels des auf n Variable ausgedehnten Satzes IVγ des § 13 und mittels der Algebra der linearen Gleichungen (s. diese Sammlung, Bd. VI, § 46) auf den Fall einer Funktion von n *Variabeln* erweitern, zwischen denen $n - 1$ Relationen (*Nebenbedingungen*) bestehen.

en Aufgabe ist, den extremen Wert von $\varphi(x, y)$ zu finden, während x, y an die Bedingung $f(x, y) = c_1$ gebunden sind, wo wiederum c_1 eine gegebene Konstante bedeutet (s. unten die Aufgabe 5).

Es wird nützlich sein, die dargelegte Theorie der extremen Werte an einer Reihe instruktiver Beispiele zu erproben, die zumeist dem Gebiete der Geometrie entnommen werden sollen.

Beispiele.

1. $$f(x) = \sin x.$$

Da $(\sin x)' = \cos x$ innerhalb der ersten vier Quadranten, d. h. von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ nur für $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ verschwindet, und $(\sin x)'' = -\sin x$ für $x = \frac{\pi}{2}$ den Wert -1, für $x = \frac{3\pi}{2}$ den Wert $+1$ annimmt, so folgt unmittelbar das aus den Elementen der Trigonometrie (s. diese Sammlung, Bd. III, § 31) wohlbekannte Ergebnis, dass sin x innerhalb der ersten vier Quadranten einen und nur einen Maximalwert (nämlich $+1$) für $x = \frac{\pi}{2}$ besitzt, und einen und nur einen Minimalwert (nämlich -1) für $x = \frac{3\pi}{2}$.

[Ganz entsprechend hat $\cos x$ sein Maximum ($+1$) an der Stelle $x = 0$, und sein Minimum (-1) an der Stelle $x = \pi$.]

Die Regel über das Maximum des Sinus gestattet zahlreiche Anwendungen, von denen einige aufgeführt werden mögen.

2. Aufgabe: „Das grösste, einem Kreise einbeschriebene Rechteck aufzusuchen."

Man wähle die Richtungen der beiden Durchmesser, die zu den Seiten eines, dem Kreise — mit dem Centrum O und dem Radius a — einbeschriebenen Rechteckes parallel sind, als Koordinatenachsen. Der auf dem Bogen des ersten Quadranten gelegene Eckpunkt des Rechtecks sei (x, y). Der Inhalt J des Rechteckes ist dann:

$$J = 4xy,$$

oder, bei Einführung von Polarkoordinaten a, φ, wo also φ ein Winkel des ersten Quadranten ist:

$$J = 4a^2 \sin\varphi \cos\varphi = 2a^2 \sin 2\varphi = 2a^2 \sin\psi,$$

wo nunmehr $\psi = 2\varphi$ das Intervall 0 bis π durchläuft, für dessen Endwerte offenbar J den Wert Null hat. Aus der stetigen Änderung von J geht hervor, dass J mindestens ein Maximum besitzen wird. In der That hat $\sin\psi$ nach der Aufgabe 1. nur das eine Maximum für $\psi = \frac{\pi}{2}$, d. i. für $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dann aber stehen die beiden Diagonalen des Rechtecks senkrecht auf einander, das Rechteck wird daher zu einem Quadrat mit dem Inhalt $2a^2$, wie sich auch trigonometrisch sofort bestätigt, da $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Man kann in diesem Falle auch die Regel IIa heranziehen. Es ist:

$$J_1 = \frac{\partial J}{\partial x} = 4y, \quad J_2 = \frac{\partial J}{\partial y} = 4x,$$

$$\varphi \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y,$$

also:

$$\frac{1}{8}(J_1\varphi_2 - J_2\varphi_1) \equiv y^2 - x^2 = 0,$$

somit $y = x$, da man sich auf positive x, y beschränken konnte.

Es gilt also:

„Das grösste, einem Kreise einbeschriebene Rechteck ist ein Quadrat, dessen Ecken durch die Endpunkte irgend zweier, auf einander senkrechter Durchmesser gebildet werden."

Das Ergebnis kann unschwer auf eine Ellipse ausgedehnt werden. Nach den Elementen (s. diese Sammlung, Bd. VIII, § 44) müssen die Seiten eines der Ellipse einbeschriebenen Rechtecks parallel den Achsen der Ellipse sein. Sind a, b die Längen der Halbachsen — deren Richtungen zu Koordinatenachsen (§ 5, (26)) gewählt werden —, φ die excentrische Anomalie, also $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, wo (x, y) wiederum der auf dem Bogen des ersten Quadranten der Ellipse gelegene Eckpunkt des Rechteckes sei, so wird:

$$J = 4xy = 2ab \sin 2\varphi,$$

so dass wiederum für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ das Maximalrechteck mit dem Inhalte $2ab$ eintritt.

Hieraus ist die geometrische Konstruktion dieses Rechteckes sofort ableitbar: „Man schlage um das Centrum der Ellipse einen Kreis mit dem Radius b; durch den Mittelpunkt des durch den ersten Quadranten dieses Kreises gebildeten Bogens lege man eine Parallele zur Richtung von a, die die Ellipse in P_1, P_2 treffe. Durch P_1, P_2 lege man noch je eine Parallele zur Richtung von b, die die Ellipse noch in P_3 resp. P_4 treffe. Dann sind P_1, P_2, P_3, P_4 die Ecken des der Ellipse einbeschriebenen Rechteckes von grösstem Inhalte."

Die Regel IIa diene wieder zur Bestätigung. Es ist jetzt:

$$\varphi \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{2x}{a^2}, \quad \varphi_2 = \frac{2y}{b^2},$$

mithin:

$$\frac{1}{8}(J_1\varphi_2 - J_2\varphi_1) \equiv \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

d. i.

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

Da aber andererseits $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$, so wird:

$$\operatorname{tg}\varphi = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe wird praktisch z. B. verwendet bei der forstlichen Aufgabe, aus einem Baumstamme von der Gestalt eines geraden Kreiscylinders mit elliptischer Basis einen Quaderbalken von grösstem Volumen auszuschneiden. Die Grundfläche dieses Quaders bildet eben das der Ellipse einbeschriebene grösste Rechteck.

3. Aufgabe: „Den Inhalt Δ eines Dreiecks mit zwei gegebenen Seiten a, b zu einem Maximum zu machen."

Sei x der von a, b eingeschlossene Winkel, so wird $2\Delta = ab \sin x$, wird also ein Maximum für $x = \frac{\pi}{2}$, d. h. für ein *rechtwinkeliges Dreieck*:

„Von allen Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten a, b besitzt das rechtwinkelige mit den Katheten a, b den grössten Inhalt."

4. Aufgabe: „Von einem Punkte O der Ebene gehen zwei geradlinige Richtungen aus; innerhalb des so gebildeten Winkels ω sei ein Punkt P markiert. Man soll durch P eine Gerade legen, die aus dem Winkel ω ein Dreieck von kleinstem Inhalt ausschneidet."

Die Figur 12 zeigt sofort, dass nicht jede Gerade durch P mit den Schenkeln von ω ein Dreieck begrenzt, dass vielmehr die Geraden, die das thun, einem gewissen Winkelraum (mit der Spitze P) angehören. Man lege nämlich durch P zu den Schenkeln von ω je eine Parallele. Dreht man dann eine Gerade durch P aus der Lage der einen Parallelen über O hinweg bis in die Lage der anderen Parallelen, so sind alle Geraden des so bestimmten Winkelraumes auszuschliessen, da sie von den beiden Schenkeln von ω je nur den einen treffen, den anderen aber erst in seiner Verlängerung (über O hinaus).

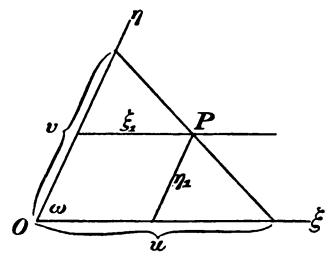


Fig. 12.

Dreht man dagegen die Gerade durch P in umgekehrter Richtung von der einen Parallelen bis zur anderen, so trifft sie in jeder Lage, die Parallelen selbst ausgenommen, beide Schenkel von ω.

Den beiden Parallelen als Grenzlagen entspricht je ein „uneigentliches" Dreieck (von dem zwei Seiten parallel sind), dessen Inhalt offenbar unendlich gross ist. Somit muss der fragliche Dreiecksinhalt wenigstens einmal zu einem Minimum werden. Da wir aber bei der Aufsuchung der extremen Werte einer Funktion $f(x)$ in einem vorgelegten Intervalle vorausgesetzt haben, dass $f(x)$ innerhalb des Intervalles, die Endpunkte eingeschlossen, stetig sei, also im besonderen auch nicht unendlich gross werde, so werden wir im vorliegenden Falle, um nicht in Schwierigkeiten zu geraten, *den reziproken* Wert $\frac{1}{\Delta}$ des zu untersuchenden Dreiecks-

ihaltes Δ als die Funktion einführen, deren extreme Werte estimmt werden sollen; jedem Minimum von Δ korrespondiert ann ein Maximum von $\frac{1}{\Delta}$ und umgekehrt. Nach diesen 'orbetrachtungen gehen wir zur Rechnung über.

Man wird die beiden Schenkel von ω als positive ichtungen eines Parallelkoordinatensystems (ξ, η) benützen: er Punkt P habe die gegebenen Koordinaten ξ_1, η_1. Eine erade durch P schneide auf den Achsen resp. die Längen , v aus, dann ist ihre Gleichung:

$$\frac{\xi}{u} + \frac{\eta}{v} = 1;$$

a aber die Gerade durch P gehen soll, so ist demnach die elation:

$$\frac{\xi_1}{u} + \frac{\eta_1}{v} = 1$$

rfüllt. Andererseits ist der doppelte Inhalt 2Δ des in Rede tehenden Dreiecks:

$$2\Delta = uv \sin\omega.$$

Da der reziproke Inhalt $\frac{1}{\Delta}$ eingeführt werden soll, so ird man auch die reziproken Werte u, v:

$$x = \frac{1}{u},\ y = \frac{1}{v}$$

ls veränderliche Grössen einführen, dann ist:

$$\xi_1 x + \eta_1 y = 1,\ \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{\sin\omega} xy.$$

ieraus ergiebt sich sofort, da $y = \frac{1 - \xi_1 x}{\eta_1}$, für $\frac{1}{2\Delta}$ als die rzulegende Funktion $f(x)$ von x:

$$f(x) = \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{\eta_1 \sin\omega} x\,(1 - \xi_1 x) = \frac{x - x^2\xi_1}{\eta_1 \sin\omega}.$$

Man hat unmittelbar:

$$f'(x) = \frac{1}{\eta_1 \sin\omega}(1 - 2x\xi_1) = 0,$$

und damit $x = \frac{1}{u} = \frac{1}{2\xi_1}$, d. i. $u = 2\xi_1$, woraus weiter, im Hinblick auf $\frac{\xi_1}{u} + \frac{\eta_1}{v} = 1$, sofort $v = 2\eta_1$ folgt.

Dass die gefundene Lösung einem Maximum von $\frac{1}{\Delta}$ entspricht, ersieht man auch analytisch sofort aus dem negativen Wert der zweiten Ableitung von $f(x)$:

$$f''(x) = -\frac{2\xi_1}{\eta_1 \sin\omega}.$$

Es werde wiederum zur Bestätigung die Regel IIa herangezogen.

Da mit $\frac{1}{\Delta}$ zugleich auch $\frac{\sin\omega}{2} \cdot \frac{1}{\Delta}$ zu einem Maximum wird, so legen wir am einfachsten als die Funktion $f(x, y)$, deren Maximum zu finden ist, die folgende zu Grunde:

$$f(x, y) = xy, \quad \varphi \equiv \xi_1 x + \eta_1 y - 1 = 0.$$

Dann wird:

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \xi_1, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \eta_1,$$

$$f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1 \equiv y\eta_1 - x\xi_1 = 0, \text{ i. e. } x\xi_1 = \eta y_1,$$

und dies in $\varphi = 0$ eingesetzt, liefert $2x\xi_1 = 2y\eta_1 = 1$, i. e. wiederum:

$$\frac{1}{x} = u = 2\xi_1, \quad \frac{1}{y} = v = 2\eta_1.$$

„Man erhält also die gesuchte Gerade durch P, die aus dem Winkel ω ein Dreieck von kleinstem Inhalt ausschneidet, indem man die Länge der Abscisse ξ_1 von P (oder auch die Länge der Ordinate η_1) von ihrem Endpunkt auf der betreffenden Achse noch einmal nach der unbegrenzten Seite des bez. Schenkels hin abträgt und den so erhaltenen Endpunkt mit P verbindet."

Hieran lassen sich einige interessante geometrische Folgerungen anknüpfen. Ein Blick auf die Figur zeigt, dass vermöge des Ähnlichkeitssatzes der Planimetrie das zwischen

den Schenkeln von ω liegende Stück der durch P gehenden, die Aufgabe lösenden Geraden in P halbiert wird (und umgekehrt, wollte man eine Gerade durch P mit der letzteren Eigenschaft suchen, so müsste es, wiederum auf Grund des Ähnlichkeitssatzes, eben die in Rede stehende Gerade sein).

Nun ist aus der analytischen Geometrie bekannt (s. diese Sammlung, Bd. VIII, § 46), dass genau die nämliche Eigenschaft der Tangente in P an die Hyperbel zukommt, die die beiden Schenkel von ω zu Asymptoten besitzt und durch P hindurchgeht. Somit hat man folgenden Satz für die Hyperbel:

„Die Tangente der Hyperbel in irgend einem ihrer Punkte P schneidet aus den Asymptoten ein Dreieck von kleinstem Inhalt aus."

5. Doppel-Aufgabe. „Von einem geraden Kreiscylinder habe das Volumen resp. die Oberfläche eine gegebene Grösse, welches ist der extreme Wert für die Grösse der Oberfläche resp. des Volumens?"

Es bedeute r den Radius des Grundkreises, h die Höhe eines geraden Kreiscylinders, so sind das Volumen V und die Oberfläche O bestimmt durch die Formeln (s. die Stereometrie dieser Sammlung):

$$V = r^2\pi h, \quad O = 2\pi r^2 + 2r\pi h.$$

Da mit V auch $V_1 = \frac{V}{\pi}$ und mit O auch $O_1 = \frac{O}{2\pi}$ je einen extremen Wert annimmt, so besteht die erste Aufgabe darin, wenn $V_1 = r^2 h$ einen gegebenen Wert c hat, $O_1 = r^2 + rh$ zu einem extremen Wert zu machen.

Setzt man den Wert $h = \frac{c}{r^2}$ in O_1 ein, so kommt:

$$O_1 = f(r) = r^2 + \frac{c}{r}, \; f'(r) = 2r - \frac{c}{r^2}, \; f''(r) = 2 + \frac{2c}{r^3}.$$

Die Forderung $f'(r) = 0$ liefert $r^3 = \frac{c}{2}$, also für r den einen (reellen) Wert:

$$r = \sqrt[3]{\frac{c}{2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

der mit Rücksicht auf den positiven Wert von $f''(r)$ einem Minimum von O entspricht. Um den zugehörigen Wert von h zu berechnen, bilde man lieber das Verhältnis von h zu r:

$$\frac{h}{r} = \frac{c}{r^3} = \frac{c}{\frac{c}{2}} = 2, \text{ d. i. } h = 2\sqrt[3]{\frac{c}{2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Bei der zweiten Aufgabe hat $O_1 = \frac{O}{2\pi} = r^2 + rh$ einen gegebenen Wert γ, während $V_1 = \frac{V}{\pi} = r^2 h$ zu einem Extremum gemacht werden soll. Vermöge der Einsetzung von $h = \frac{\gamma - r^2}{r}$ geht V_1 über in:

$$V_1 = F(r) = \gamma r - r^3, \quad F'(r) = \gamma - 3r^2, \quad F'''(r) = -6r.$$

Für $F'(r) = 0$ ergiebt sich der eine (reelle) positive Wert, der wegen des negativen Wertes von $F'''(r)$ einem Maximum von V korrespondiert:

$$r = +\sqrt{\frac{\gamma}{3}} = +\sqrt{\frac{O}{6\pi}}.$$

Zur Bestimmung von h bilde man wiederum kürzer:

$$\frac{h}{r} = \frac{\gamma}{r^2} - 1 = \frac{\gamma}{\frac{\gamma}{3}} - 1 = 3 - 1 = 2,$$

$$h = 2r = 2\sqrt{\frac{\gamma}{3}} = 2\sqrt{\frac{O}{6\pi}}.$$

Fasst man das Wesentliche für beide Aufgaben zusammen, so hat man den Satz:

> „Unter allen geraden Kreiscylindern mit vorgegebenem Volumen resp. vorgegebener Oberfläche hat derjenige die kleinste Oberfläche resp. das grösste Volumen, dessen Höhe gleich dem Durchmesser des Grundkreises ist."

Dass in der That bei der ersten Aufgabe wenigstens *ein Minimum* von O, und bei der zweiten Aufgabe wenig-

stens ein Maximum von V existieren muss, kann man direkt aus den Ausdrücken für $O_1 = r^2 + \frac{c}{r}$ resp. $V_1 = \gamma r - r^3 = r(\gamma - r^2)$ entnehmen. Denn im ersten Falle übersteigt O_1, also auch $O = 2\pi O_1$, sowohl wenn r gegen Null konvergiert, als wenn r unendlich gross wird, jede Grenze (während innerhalb dieses Intervalles von r O lauter endliche von Null verschiedene Werte annimmt); es liegt also hier ein Fall von demselben Charakter vor wie bei der Aufgabe 4.

Bei der zweiten Aufgabe kann man r das eine Mal gegen Null, das andere Mal gegen $+\sqrt{\gamma}$ konvergieren lassen. (Im Grenzfalle $r^2 = \gamma$ ist offenbar der gegebene Wert $0 = 2\pi\gamma = 2\pi r^2$ der Oberfläche so gross als die Flächen der beiden Grundkreise zusammen, so dass für den Mantel und damit für h der Wert Null resultiert: einem grösseren Werte $r (> \sqrt{\gamma})$ entspricht also überhaupt kein Volumen mehr.) Beidemal konvergiert $V_1 = r(\gamma - r^2)$ und damit V gegen Null, sodass im Intervalle $r = 0$ bis $r = \sqrt{\gamma}$ mindestens ein Maximum vorhanden sein muss.

Man darf daher wieder die Regel IIa heranziehen. Dann hat man unmittelbar:

$$\frac{\partial (r^2 h)}{\partial r} = 2rh, \quad \frac{\partial (r^2 h)}{\partial h} = r^2, \quad \frac{\partial (r^2 + rh)}{\partial r} = 2r + h,$$

$$\frac{\partial (r^2 + rh)}{\partial h} = r,$$

und das Verschwinden der Funktionaldeterminante (10) führt zu:

$$2r^2 h - (2r^3 + hr^2) \equiv r^2 (h - 2r) = 0,$$

also, da $r = 0$ nur einen ausgearteten Cylinder giebt, wie oben, für beide Aufgaben zur gemeinsamen Lösung $h = 2r$.

Der Vorteil der zweiten Methode zeigt sich offenbar darin, dass nicht nur das Verhältnis $\frac{h}{r}$, dessen Wert 2 für beide Aufgaben charakteristisch ist, von selbst hervortritt, sondern auch, wie bereits in der Theorie betont, die Lösung *unmittelbar als eine* beiden Aufgaben gemeinsame erscheint.

6. Aufgabe. „Einem Dreieck mit den Seiten a, b, c werde derart ein Rechteck einbeschrieben, dass dessen eine Seite (die Grundlinie des Rechtecks) einen Teil von a (der Grundlinie des Dreiecks) bildet, während die Ecken der Gegenseite in b, c liegen. Welches von allen diesen Rechtecken hat den grössten Inhalt?“

Die Winkel, die a mit b, c bildet, seien γ, β (offenbar darf keiner dieser beiden Winkel stumpf sein), die zu a gehörige Dreieckshöhe sei h. Die Grundlinie des Rechtecks sei x, die Höhe desselben y.

Die Dreieckseite a setzt sich aus den drei Stücken x, $y \operatorname{cotg}\beta$ und $y \operatorname{cotg}\gamma$ zusammen, so dass die Relation besteht:

$$\varphi(x, y) \equiv x + y(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma) - a = 0,$$

während der Inhalt $R = xy$ des Rechtecks ein Maximum werden soll. Man setze zur Abkürzung:

$$\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = g, \text{ also } \varphi \equiv x + gy - a = 0,$$

so wird $R = xy$ als Funktion von y:

$$R = f(y) = y(a - gy) = ay - gy^2.$$

Da für $y = 0$ wie für $y = \frac{a}{g} = h$*) R den Wert Null hat, so liegt im wesentlichen dieselbe analytische Aufgabe vor wie bei 4.

Es wird:

$$f'(y) = a - 2gy, \quad f''(y) = -2g,$$

so dass $f'(y) = 0$ mit Rücksicht auf den negativen Wert von $f''(y)$ das fragliche Maximum von R für $y = \frac{a}{2g}$ liefert.

Bezeichnet man die beiden Projektionen von b, c auf a mit p, q, so ist:

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{q}{h}, \quad \operatorname{cotg}\gamma = \frac{p}{h},$$

also:

$$g = \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{p+q}{h} = \frac{a}{h},$$

*) Dass $h = \frac{a}{g}$ ist, wird gleich nachher gezeigt.

und es wird demnach:

$$y = \frac{a}{2g} = \frac{h}{2},$$

woraus sich wegen $\varphi = 0$ für x der Wert $\frac{a}{2}$ ergiebt. Das liefert den Satz:

„Unter allen einem Dreieck einbeschriebenen Rechtecken, deren Grundlinien auf der Grundlinie des Dreiecks liegen, hat dasjenige den grössten Inhalt, dessen Höhe gleich der halben Höhe des Dreiecks ist (oder auch, dessen Grundlinie gleich der halben Grundlinie des Dreiecks ist)."

Die Bestätigung mittels IIa vollzieht sich wie bei Aufgabe 4.

Damit ist die Konstruktion des in Rede stehenden Rechtecks gegeben, man braucht nur durch den Mittelpunkt von h eine Parallele zu a zu legen, und von deren Schnittpunkten mit b, c Lote auf a zu fällen.

7. Aufgabe. „Einem geraden Kreiskegel sei ein gerader Kreiscylinder derart einbeschrieben, dass der Grundkreis des letzteren ein zu dem Grundkreis des Kegels konzentrischer Kreis ist, auf dessen Peripherie Lote errichtet werden, bis sie den Mantel des Kegels treffen. Welcher von diesen Kreiscylindern hat das grösste Volumen?"

Die Aufgabe lässt sich an die vorige anschliessen; denn lässt man unter der Annahme $\beta = \gamma$ die dortige Figur um die Dreieckshöhe h rotieren, so erzeugt das Dreieck einen geraden Kreiskegel und das dem Dreieck einbeschriebene Rechteck den dem Kegel einbeschriebenen Cylinder. Ist daher x der Radius des Cylindergrundkreises, y die Höhe des Cylinders, so ist wie oben:

$$\varphi \equiv x + y\frac{a}{h} - a = 0, \quad x = \frac{a}{h}(h - y),$$

und demnach das mit $\pi \cdot \frac{a^2}{h^2}$ dividierte Volumen V des Cylinders, das wiederum für $y = 0$ und $y = h$ den Wert *Null hat:*

$$f(y) = \frac{h^2 V}{a^2 \pi} = \frac{h^2}{a^2} x^2 y = y(h^2 - 2hy + y^2) = yh^2 - 2hy^2 + y$$

$$f'(y) = h^2 - 4hy + 3y^2, \quad f''(y) = -4h + 6y.$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung $f'(y) =$ liefert zunächst die beiden Wurzeln:

$$y = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 3h^2}}{3} = \frac{2h \pm h}{2}.$$

Da aber die eine Wurzel $\frac{2h + h}{3} = h$ dem ausgeartete Cylinder vom Volumen Null entspricht, so kommt nur di andere Wurzel:

$$y = \frac{2h - h}{3} = \frac{h}{3}$$

in Betracht, für die, wie es sein muss,

$$f''(y) = -4h + 2h = -2h$$

negativ ausfällt. Damit bestimmt sich das zugehörige x al

$$x = \frac{a}{h}\left(h - \frac{h}{3}\right) = \frac{2ah}{3h} = \frac{2a}{3},$$

und es gilt:

„Unter allen einem geraden Kreiskege einbeschriebenen geraden Kreiscylinder (deren Grundkreise mit dem Grundkreis de Kegels konzentrisch sind) hat derjenige da grösste Volumen, dessen Höhe ein Dritte der Kegelhöhe ist (oder auch, für den de Radius des Grundkreises zwei Drittel vo Radius des Kegelgrundkreises beträgt)."

Die Regel IIa liefert unmittelbar die Bestätigung. D

$$\frac{\partial (x^2 y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial (x^2 y)}{\partial y} = x^2, \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = \frac{a}{h},$$

so kommt nach Weglassung des der Aufgabe fremd Faktors x:

$$2y\frac{a}{h} - x = 0, \text{ i. e. } 2y \cdot \frac{a}{h} = x, \quad x = \frac{2a}{3}, \quad y = \frac{h}{3}.$$

8. Aufgabe. „Welches unter allen Vierecken (sc. ohne einspringende Winkel) mit gegebenen Seiten a, b, c, d hat den grössten Inhalt?“

Sei φ der Winkel (a, b), ψ der Winkel (c, d), e die Diagonale, die das Viereck in die beiden Dreiecke mit den Seiten a, b, e resp. c, d, e zerlegt, so ist:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = c^2 + d^2 - 2cd\cos\psi,$$

also:

$$\Phi(\varphi, \psi) \equiv (a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) + 2cd\cos\psi - 2ab\cos\varphi = 0,$$

während der doppelte Inhalt $2J$ des Vierecks:

$$2J = ab\sin\varphi + cd\sin\psi$$

zu einem Maximum gemacht werden soll.

Da die Einführung von $2J$ als Funktion von φ allein auf rechnerische Schwierigkeiten stösst, so werden wir uns zunächst der Regel IIa bedienen: ergiebt diese, wie es der Fall sein wird, nur eine Lösung, so bleibt hinterher noch zu zeigen, dass diese wirklich einem Maximum von $2J$ entspricht.

Die partiellen Ableitungen von Φ nach φ resp. ψ sind:

$$\Phi_1 = +2ab\sin\varphi, \quad \Phi_2 = -2cd\sin\psi,$$

und die von $2J$:

$$ab\cos\varphi \text{ resp. } cd\cos\psi.$$

Das Verschwinden der Funktionaldeterminante (10) liefert, da der von Null verschiedene Faktor $2abcd$ unterdrückt werden kann:

$$\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi \equiv \sin(\varphi + \psi) = 0.$$

Da die Lösungen $\varphi + \psi = 0$, $\varphi + \psi = 2\pi$ nur uneigentlichen Vierecken zukommen können, so bleibt als einzige in Betracht kommende Lösung $\varphi + \psi = \pi$, d. i. das Viereck ist ein Kreisviereck, und der Maximalinhalt des gesuchten Vierecks ist nach den Elementen der Trigonometrie (s. diese Sammlung, Bd. III, § 53 (12)):

$$J = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

wo:

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Um zu erkennen, dass hier in der That ein Maximum u kein Minimum vorliegt, vergleiche man den gefundenen W von J mit den Inhalten zweier anderer geeignet ausgewählt Vierecke mit den nämlichen Seiten a, b, c, d.

Es wird sich empfehlen, zu dem Behufe die beid Grenzvierecke zu betrachten, die zu den Winkeln $\varphi = 2$ resp. 0 gehören.

Für $\varphi = 2\pi$ artet das Viereck aus in ein Dreieck m den Seiten $a + b, c, d$, sodass der Inhalt Δ des Dreiec wird (s. diese Sammlung, Bd. III, § 39 (6)):

$$\Delta = \sqrt{s\{s - (a+b)\}(s-c)(s-d)}, \quad s = \frac{a+b+c+}{2}$$

Da aber $(s-a)(s-b) = s^2 - s(a+b) + ab$ offenb grösser ist als $s\{s-(a+b)\}$, so ist auch $J > \Delta$.

Für $\varphi = 0$ resultiert entsprechend ein Dreieck mit d Seiten $b-a, c, d$ (wo, wie es erlaubt ist, $b \geqq a$ angenomm ist). Dass dessen Inhalt kleiner ist als Δ, ersieht man u mittelbar aus dem zu Δ analog gebildeten Ausdrucke.

Nunmehr möge aber die in Rede stehende Aufgabe au direkt nach der Hauptregel II behandelt werden.

Dann empfiehlt es sich, nicht φ, sondern e als u abhängige Variable einzuführen, so dass:

$$2J = ab \sin\varphi + cd \sin\psi = f(\varphi, \psi) = f(e)$$

zunächst als eine Funktion von φ, ψ erscheint, die ihre seits vermöge der Relationen:

$$\Phi \equiv e^2 - (a^2 + b^2) + 2ab\cos\varphi = 0,$$

$$\Psi \equiv e^2 - (c^2 + d^2) + 2ab\cos\psi = 0$$

als (implizite) Funktionen von e fixiert sind. Nach § 13, (IV kommt:

$$f' = \frac{df}{de} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{de} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{d\psi}{de},$$

$$\frac{d\varphi}{de} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial e}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}}, \quad \frac{d\psi}{de} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial e}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \psi}}.$$

Man hat der Reihe nach:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = ab\cos\varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial \psi} = cd\cos\psi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial e} = 2e = \frac{\partial \Psi}{\partial e},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -2ab\sin\varphi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} = -2cd\sin\psi,$$

$$\frac{d\varphi}{de} = \frac{e}{ab\sin\varphi}, \quad \frac{d\psi}{de} = \frac{e}{cd\sin\psi},$$

$$f' = \frac{df}{de} = e(\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\psi) = 0;$$

mithin ergiebt sich, da der Fall $e = 0$ nicht eintreten kann, für einen extremen Wert von J:

$$\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\psi \equiv \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\varphi\sin\psi} = 0, \text{ d. i. } \sin(\varphi+\psi) = 0,$$

und damit eben die oben auf Grund von IIa gefundene Lösung $\varphi + \psi = \pi$.

Dass die Lösung ein Maximum von J repräsentiert, lässt sich jetzt durch Bestimmung des Vorzeichens von $f''(e)$ analytisch bestätigen. Es wird (s. § 13 (67)):

$$f'' = f''(e) = \frac{\partial f'}{\partial e} + \frac{\partial f'}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{de} + \frac{\partial f'}{\partial \psi}\frac{d\psi}{de},$$

$$\frac{\partial f'}{\partial e} = \operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\psi, \quad \frac{\partial f'}{\partial \varphi} = -\frac{e}{\sin^2\varphi}, \quad \frac{\partial f'}{\partial \psi} = -\frac{e}{\sin^2\psi},$$

demnach, unter Benutzung der obigen Werte von $\frac{d\varphi}{de}$, $\frac{d\psi}{de}$:

$$f'' = f''(e) = \operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\psi - e^2\left\{\frac{1}{ab\sin^3\varphi} + \frac{1}{cd\sin^3\psi}\right\}.$$

Setzt man hier die Lösung $\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\psi = 0$ ein, so wird f'' unbedingt negativ, da $\sin\varphi$, $\sin\psi$ im Viereck stets positiv sind.

9. Aufgabe. „In einer Ebene seien auf derselben Seite einer Geraden g zwei Punkte P_1, P_2 gegeben: Man suche auf g einen Punkt X derart, dass die Summe der Entfernungen $s_1 = P_1X$ und $s_2 = P_2X$ ein Minimum wird."

Man fälle (s. Fig. 13) von P_1, P_2 auf g die Lote a_1, a_2 mit den Fusspunkten A_1, A_2; die Entfernung $\overline{A_1A_2}$ sei c.

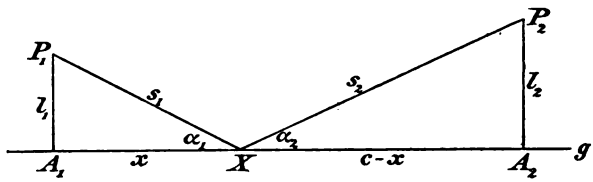


Fig. 13.

Die Entfernung $\overline{A_1X}$ werde als unabhängige Variable x eingeführt, die Entfernung $\overline{XA_2}$ ist dann $c - x$.

Nach dem Pythagoräischen Satze ist die zu untersuchende Funktion:

$$s_1 + s_2 = f(x) = \sqrt{a_1^2 + x^2} + \sqrt{a_2^2 + (c - x)^2}.$$

Es kommt:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{a_2^2 + (c - x)^2}} = \frac{x}{s_1} - \frac{c - x}{s_2},$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{a_1^2 + x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a_1^2 + x^2}}}{a_1^2 + x^2} + \frac{\sqrt{a_2^2 + (c - x)^2} - \dfrac{(c - x)^2}{\sqrt{a_2^2 + (c - x)^2}}}{a_2^2 + (c - x)^2}$$

$$= \frac{a_1^2}{s_1^3} + \frac{a_2^2}{s_2^3}.$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ liefert $\dfrac{x}{s_1} = \dfrac{c - x}{s_2}$ oder, wenn man die Winkel zwischen s_1 und x, resp. s_2 und $c - x$ mit α_1 resp. α_2 bezeichnet:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2.$$

Der fragliche Punkt X liegt also auf der Strecke A_1A_2 (denn für einen Punkt auf g ausserhalb dieser Strecke würde einer der beiden Winkel α_1, α_2 stumpf, also sein Cosinus negativ werden) so, dass:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

ausfällt. Dass dann ein Minimum von $s_1 + s_2$ eintritt, zeigt *die Positivität* von $f''(x)$.

Dem erhaltenen Ergebnis lässt sich eine einfache

physikalische Deutung geben. Es falle von einem Punkte P_1 ein Lichtstrahl auf einen Planspiegel im Punkte X, und sei P_2 irgend ein Punkt auf dem reflektierten Strahle. Dann liegen bekanntlich P_1, X, P_2 in einer Ebene, die auf der des Planspiegels senkrecht steht, und ist g die Achse beider Ebenen, α_1 und α_2 die Winkel von g mit dem einfallenden und reflektierten Strahle, so sagt das „Reflexionsgesetz" der Optik aus, dass die Winkel α_1 und α_2 gleich sein müssen. Es gilt also:

> „Das Reflexionsgesetz der Optik für einen Planspiegel ist mit dem andern Gesetze äquivalent, dass die von irgend einer Stelle P_1 des einfallenden Strahles bis zu irgend einer Stelle P_2 des reflektierten Strahles gerechnete Weglänge ein Minimum ist."

Für „Weglänge" hätte man in diesem Satze auch „Zeitlänge" setzen können, denn in einem und demselben Medium, wie es hier vorausgesetzt wird, ist ein in einer Zeit t zurückgelegter Weg s mit t proportional, nämlich gleich vt, wo v die konstante „Geschwindigkeit" ist. Gehören also zu s_1, s_2 resp. die Zeiten t_1, t_2, so ist $t_1 + t_2 = \frac{s_1 + s_2}{v}$ und $\frac{s_1 + s_2}{v}$ wird zugleich mit $s_1 + s_2$ ein Minimum.

Diese Bemerkung gestattet, mit leichten Modifikationen die angestellte Betrachtung auf das „Brechungsgesetz" der Optik zu übertragen.

Man denke sich die geometrische Figur, mit Beibehaltung aller Bezeichnungen, dahin abgeändert, dass jetzt P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten von g liegen. Dann repräsentiert $s_1 + s_2$ den Weg eines Lichtstrahles, der von P_1 bis X ein Medium M_1 in der Zeit t_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit v_1 durchläuft, und entsprechend von X bis P_2 ein anderes Medium M_2 in der Zeit t_2 mit der konstanten Geschwindigkeit v_2. Es ist nunmehr einzeln $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$, $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$, somit:

$$t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}.$$

Dann liefert die obige Rechnung unmittelbar für die Funktion:

$$F(x) = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}:$$

$$F'(x) = \frac{\cos \alpha_1}{v_1} - \frac{\cos \alpha_2}{v_2}, \quad F''(x) = \frac{a_1^2}{v_1 s_1^3} + \frac{a_2^2}{v_2 s_2^3},$$

und es resultiert das Minimum von $F(x)$ für:

$$\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

oder auch, wenn man statt α_1, α_2 die komplementären Winkel β_1, β_2 einführt, die das in X auf g errichtete „Einfallslot" mit s_1, s_2 bildet:

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

d. i. aber das Brechungsgesetz der Optik. Es gilt also:

> „Das Brechungsgesetz der Optik (für zwei durch eine ebene Fläche getrennten Medien) ist dem andern Gesetze äquivalent, dass die von irgend einer Stelle P_1 des einfallenden Strahles bis zu irgend einer Stelle P_2 des gebrochenen Strahles gebrauchte *Zeit* ein Minimum ist."

10. Aufgabe. „Die extremen Werte von $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ zu bestimmen."

Die Gleichung:

$$f'(x) \equiv \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \equiv \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} = 0$$

liefert als eventuelle Lösungen die Wurzeln von $1 - 3x^2 = 0$, d. i.:

$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die Rechnung zur Bestimmung des Vorzeichens von $f''(x)$ für $x = x_1$ resp. x_2 lässt sich mit Rücksicht darauf, dass $f'(x)$ die Form eines Bruches $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ hat, abkürzen. Denn von der Differenz:

$$f''(x) = \frac{\psi\varphi' - \varphi\psi'}{\psi^2} = \frac{\varphi'}{\psi} - \frac{\varphi\psi'}{\psi^2}$$

ist nur das erste*) Glied $\frac{\varphi'}{\psi}$ zu berücksichtigen, da ja φ für $x = x_1$ resp. $x = x_2$ verschwindet. Somit kommt:

$$f''(x_1) = \frac{-6x_1}{(1+x_1^2)^3} < 0, \quad f''(x_2) = \frac{-6x_2}{(1+x_2^2)^3} > 0;$$

folglich tritt für $x = x_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ das Maximum, für $x = x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ das Minimum von $f(x)$ ein, und zwar wird:

$$f(x_1) = +\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{9}{16}, \quad f(x_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{9}{16},$$

also, abgesehen vom Vorzeichen, ein Wert $= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{243}{256}}$, der etwas kleiner als $\frac{1}{3}$ ausfällt.

Die in Rede stehende Aufgabe wird eine Verwendung in § 19 finden, wo man des Maximums des absoluten Wertes der zweiten Ableitung von $\operatorname{arctg} x$, d. i. von $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ bedarf.

Kapitel II.

Die Taylorsche und Mac-Laurinsche Reihenentwickelung mit Anwendungen.

§ 19. Die Taylorsche und Mac-Laurinsche Reihenentwickelung für Funktionen einer Variabeln. Anwendungen auf Unbestimmtheitswerte, extreme Werte, Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient.

Nachdem die Fruchtbarkeit des Mittelwertsatzes (§ 15, III) in den drei letzten Paragraphen deutlich hervorgetreten ist, soll die Aufgabe, für die der Mittelwertsatz die erste Stufe bildete, die Differenz $f(b) - f(a)$ einer Funktion $f(x)$ nach

*) Die analoge Bemerkung gilt offenbar allgemein bei der Ermittelung der extremen Werte einer Funktion $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Potenzen von $b - a = h$ zu entwickeln, in weiterem Umfange aufgenommen werden.

In § 18 zeigte sich bereits, dass unter Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ und ihrer n ersten Ableitungen im Intervalle (a, b) durch blosse wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes eine Entwickelung hervorging von der Gestalt:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = {} & hf'(a) + h^2 c_2 f''(a) + h^3 c_3 f'''(a) + \dots \\ & + h^{n-1} c_{n-1} f^{(n-1)}(a) \\ & + h^n c_n f^{(n)}(a + \vartheta h), \quad (0 < \vartheta < 1), \end{aligned} \tag{1}$$

die allerdings zur Untersuchung der extremen Werte von $f(x)$ ausreichte, indessen für weitere Zwecke, insbesondere zu einer Berechnung von $f(x)$, an dem wesentlichen Mangel leidet, dass man von den unbekannten Koeffizienten c_2, c_3, $\dots$ c_n nur weiss, dass ihre Werte zwischen 0 und 1 enthalten sind.

Da eine direkte Bestimmung dieser Koeffizienten auf Schwierigkeiten stösst, versuchen wir lieber, den leitenden Grundgedanken, der in § 15 zum Mittelwertsatz führte, weiter auszubilden.

Der nächste Schritt würde in diesem Sinne sein, im Hinblick auf (1) für $n = 2$, den Ansatz zu konstruieren:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a) + (b - a)^2 D_2, \tag{2}$$

um hier die durch die Natur der Funktion $f(x)$ und die Wahl der Grössen a, b völlig bestimmte Grösse D_2 formal durch die zweite Ableitung von f auszudrücken. Indem man, entsprechend dem damaligen Vorgehen in § 15, durch blosse Vertauschung von a mit einer Variabeln x die Hilfsfunktion $\varphi_2(x)$ herstellt:

$$\varphi_2(x) \equiv f(b) - f(x) - (b - x) f'(x) - (b - x)^2 D_2, \tag{3}$$

erkennt man sofort, dass $\varphi_2(x)$ für $x = b$, aber auch, wegen (2 für $x = a$ verschwindet, und im Intervalle (a, b) stetig verläuft, vorausgesetzt, dass dies für $f(x)$ und $f'(x)$ gilt. Ist das Nämliche auch für $f''(x)$ der Fall, so ist der Mittelwertsatz auf $\varphi_2(x)$ anwendbar: es giebt also im Intervall (a, b) mindestens einen Mittelwert $\xi_2 = a + \vartheta_2 h\,(0 < \vartheta_2 < 1$ für den $\varphi_2'(x)$ verschwindet. Nun ist:

$$\varphi_2'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + 2(b-x)D_2$$
$$= -(b-x)\{f''(x) - 2D_2\};$$

thin folgt, da ξ_2 jedenfalls von b verschieden ist, für die rösse D_2 die gewünschte Darstellung:

$$) \qquad D_2 = \frac{1}{2}f''(\xi_2) = \frac{1}{2}f''(a+\vartheta_2 h),\ 0<\vartheta_2<1,$$

o dass (2) übergeht in:

$$6)\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a+\vartheta_2 h),$$
$$0<\vartheta_2<1,\ h=b-a.$$

Da hiermit der Koeffizient c_2 in (1) gleich $\frac{1}{2}$ bestimmt ist, wird man von Neuem ansetzen:

$$(7)\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + (b-a)^3 D_3,$$

und D_3 durch die dritte Ableitung von f ausdrücken.

Durch abermalige Vertauschung von a mit x bietet sich jetzt die Hilfsfunktion dar:

$$(8)\ \varphi_3(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2}f''(x) - (b-x)^3 D_3,$$

die für $x=b$ und $x=a$ den Wert Null hat und im Intervalle (a, b) stetig ist. Ist auch $f'''(x)$ daselbst stetig, so liefert der Mittelwertsatz das Verschwinden von $\varphi_3'(x)$ für einen neuen Mittelwert ξ_3. Da:

$$\varphi_3'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + (b-x)f''(x)$$
$$9)\qquad -\frac{(b-x)^2}{2}f'''(x) + 3(b-x)^2 D_3$$
$$= -\frac{(b-x)^2}{2}\{f'''(x) - 2\cdot 3 D_3\},$$

o ergiebt sich D_3 in der gewünschten Gestalt:

$$10) \qquad D_3 = \frac{1}{3!}f'''(\xi_3) = \frac{1}{3!}f'''(a+\vartheta_3 h),\ 0<\vartheta_3<1,$$

nd (8) geht über in:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)$$

(11)
$$+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''\{a+\vartheta_3(b-a)\},\qquad 0<\vartheta_3<1.$$

Da bei dem nächsten Schritte die entsprechende Grösse D_4 in der Form $\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi_4)$ erscheinen würde, so wird man nach dem Prinzip der unvollständigen Induktion allgemein die Aufgabe dahin formulieren, in dem Ansatze:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)$$
$$+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+\dots$$
(12)
$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$
$$+\frac{(b-a)^n}{n!}D_n$$

den letzten Faktor D_n durch die n^{te} Ableitung von f auszudrücken unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ nebst den n ersten Ableitungen im Intervalle (a, b) stetig ist. Die für $x=a$ und $x=b$ verschwindende und im vorgelegten Intervalle stetige Hilfsfunktion $\varphi_n(x)$ lautet jetzt:

$$\varphi_n(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\dots$$

(13)
$$-\frac{(b-x)^i}{i!}f^{(i)}(x)-\frac{(b-x)^{i+1}}{(i+1)!}f^{(i+1)}(x)-\dots$$
$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)-\frac{(b-x)^n}{n!}D_n,$$

und die Ausführung der ersten Ableitung von $\varphi_n(x)$ zeigt, wie sich der Reihe nach je zwei aufeinander folgende *Glieder* bis auf die beiden letzten zerstören:

$$\varphi_n'(x) = -f'(x)+f'(x)-(b-x)f''(x)+(b-x)f''(x)-\dots$$
$$+\frac{(b-x)^{i-1}}{(i-1)!}f^{(i)}(x)-\frac{(b-x)^i}{i!}f^{(i+1)}(x)$$
$$+\frac{(b-x)^i}{i!}f^{(i+1)}(x)-\frac{(b-x)^{i+1}}{(i+1)!}f^{(i+2)}(x)+\dots \tag{14}$$
$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}D_n$$
$$=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\{f^{(n)}(x)-D_n\};$$

und da es auf Grund des Mittelwertsatzes im Intervalle (a, b) mindestens einen von b verschiedenen Mittelwert ξ_n geben muss, für den φ_n' verschwindet, so kommt:

$$D_n = f^{(n)}(\xi_n) = f^{(n)}\{a+\vartheta_n(b-a)\}, \quad 0<\vartheta_n<1, \tag{15}$$

und man ist damit, durch Einsetzung des gefundenen Wertes für D_n in (12), zu dem Gesetze der sogenannten Taylorschen Reihenentwickelung für eine Funktion $f(x)$ einer Variabeln x gelangt (indem man wieder ϑ statt ϑ_n schreibt):

I. „Sind in einem vorgelegten Intervalle (a, b) eine Funktion $f(x)$ und ihre (daselbst als existierend vorausgesetzten) n ersten Ableitungen stetig, bedeutet ferner ϑ einen im übrigen unbekannten Wert zwischen Null und Eins, so gilt:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)$$
$$+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a)+\dots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \tag{I}$$
$$+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}\{a+\vartheta(b-a)\},$$

wo das letzte Glied das ‚*Lagrangesche Restglied*' genannt wird."

Für die theoretischen wie praktischen Anwendungen der Taylorschen Reihe empfiehlt es sich, in Analogie mit der binomischen Entwickelung in § 6 (VI), sowie mit der

Entwickelung von e^x, a^x in § 12, (Vb), (VIb), die gebrauchten Bezeichnungen etwas abzuändern. Innerhalb eines Intervalles, für das die angeführten Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind, seien x und $x+h$ irgend zwei Werte, dann nimmt (I), indem man a durch x und b durch $x+h$ ersetzt, die Gestalt an:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^n(x+\vartheta h), \qquad (0<\vartheta<1). \tag{Ia}$$

Da durch diese Formel, wie beim binomischen Satze, die Vergleichung zweier Werte der Funktion $f(x)$ für zwei verschiedene Argumente ermöglicht wird, so wird man, wenn es nur auf die Berechnung von f für irgend einen Wert des Argumentes ankommt, der Variabeln x einen passend gewählten konstanten Wert beilegen. Ist es erlaubt, hierfür den Wert Null zu nehmen, so geht aus (Ia), wenn man wiederum h durch den Buchstaben x ersetzt, die sogenannte Mac-Laurinsche Reihenentwickelung für Funktionen einer Variabeln hervor:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta x), \qquad (0<\vartheta<1); \tag{II}$$

hier ist vorauszusetzen, dass das Intervall $(0, x)$ einem Intervalle angehört, in den $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ stetig (insbesondere also nicht unendlich gross) sind.

Es hat zunächst das Aussehen, als ob die Mac-Laurinsche Entwickelung von speziellerem Charakter sei als die Taylorsche, doch ist das nur scheinbar der Fall; in der That gelingt es, aus der ersteren wieder die letztere herzuleiten. Denn wenn eine Funktion $\varphi(x+h)$ vorliegt, die (unter Annahme der erforderlichen Stetigkeitsbedingungen) auf Grund der Entwickelung (II) nach Potenzen von x ent

wickelt werden soll, so betrachte man $\varphi(x+h)$ als eine Funktion von x allein, indem man sich der Grösse h für den Augenblick einen festen Wert beigelegt denke, und bezeichne sie in diesem Sinne mit $f(x)$ und wende sodann auf $f(x)$ die Formel (II) an. Das erste Glied $f(0)$ rechterhand von (II) geht aus $f(x) = \varphi(x+h)$ durch Nullsetzen von x hervor, ist also $= \varphi(h)$. Um die weiteren Glieder zu ermitteln, bilde man zuvörderst die successiven Ableitungen von $f(x) = \varphi(x+h)$ nach x (auf Grund der Regel der Funktionen von Funktionen, § 13 (I)); da die Ableitung von $x+h$ nach x gleich 1 ist, so fällt eine beliebige Ableitung von $f(x)$ zusammen mit der entsprechenden von $\varphi(x+h)$ nach x, gebildet für den Wert $x+h$. Wird nunmehr nach Massgabe von (II) in der ersten bis $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung von $f(x)$ für das Argument x der Wert 0 eingesetzt, in der n^{ten} Ableitung für x das Argument ϑx, so kommt der Reihe nach:

$$(16)\qquad \begin{gathered} f(0) = \varphi(h),\ f'(0) = \varphi'(h),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0) = \varphi^{(n-1)}(h), \\ f^{(n)}(\vartheta x) = \varphi^{(n)}(h + \vartheta x), \end{gathered}$$

und damit liefert (II), wenn man hinterher die Bezeichnungen x und h vertauscht, wodurch $\varphi(x+h) = \varphi(h+x)$ keine Änderung erleidet, und als Funktionsbuchstaben wieder f wählt, eben die gewünschte Taylorsche Entwickelung (Ia).

Da im Restgliede der Entwickelungen (Ia) resp. (II) eine unbekannte Grösse ϑ (zwischen 0 und 1) erscheint, so wird die Anwendung von (Ia) und (II) (so vor allem auf eine möglichst genaue Berechnung der Funktion $f(x)$) in demselben Sinne erfolgen müssen wie in den Formeln (I), (27), (Ya), (VIa) des § 12 die Anwendung der Reihen für e, $\frac{1}{e}$, e^x, a^x, wo ebenfalls ein nicht genau berechenbarer Rest auftritt: man wird in jedem einzelnen Falle, bei passender Wahl des zugehörigen Intervalles, nachweisen müssen, dass bei genügend grossem n das Restglied, absolut genommen, unter jede noch so kleine vorgegebene (positive) Grösse heruntergedrückt werden kann, vorausgesetzt natürlich, dass auch bei genügend grossem n die n^{te} Ableitung von $f(x)$ in dem vorgelegten Intervalle existiert und stetig bleibt. Man sagt dann, dass die Entwickelung (Ia) resp. (II) „konvergiert".

In § 12 (39), (40) war auf elementarem Wege bewiesen worden, dass, wie gross auch der absolute Wert einer vorgegebenen Grösse h sei, die natürliche Zahl n stets so gross angenommen werden kann, dass der absolute Wert von $\frac{h}{n}$ unter jede Grenze sinkt. Nun besteht das Restglied in (Ia) aus dem Produkt von $\frac{h^n}{n!}$ und $f^{(n)}(x+\vartheta h)$; lässt sich also zeigen, dass der absolute Wert von $f^n(x)$, wie gross man auch n nehme, für alle Werte des Intervalles $(x, x+h)$ unter einer festen angebbaren Zahl bleibt, so würde damit die Konvergenz von (Ia) dargethan sein, und das Entsprechende gilt von (II).

In der That lassen sich so, wie der nächste Paragraph lehren wird, eine Reihe elementarer Funktionen erledigen. Indessen werden zwei wichtige Fälle, nämlich die Entwickelungen von $(1+x)^n$ und von $l(1+x)$ zeigen, dass der fragliche Beweis, eben weil über die Grösse ϑ nichts Näheres bekannt ist, auf Schwierigkeiten stösst.

Für derartige Fälle erhebt sich die Frage, ob sich nicht durch geeignete Abänderung der Hilfsfunktion $\varphi_n(x)$ (13) das Restglied in (Ia) in die Gestalt eines Produktes $ABf^{(n)}(a+\vartheta h)$ bringen lässt, wo $|A|$ wiederum bei wachsendem n gegen Null konvergiert, während der absolute Wert des Produktes $Bf^{(n)}(a+\vartheta h)$ trotz wachsenden n's und unbekannten ϑ's eine feste angebbare Zahl niemals überschreitet?

Zu dem Behufe wird es sich empfehlen, den Ansatz (12) dahin zu verallgemeinern, dass der Exponent von $(b-a)$ im letzten Gliede noch unbestimmt gelassen wird, also gleich einer noch verfügbaren natürlichen Zahl p $(=1, 2, \ldots)$ gesetzt wird:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + (b-a)^p P_n, \tag{12'}$$

wo wiederum P_n durch die n^{te} Ableitung von f ausgedrückt werden soll. Die erforderliche Hilfsfunktion, sie sei jetzt mit $\chi_n(x)$ bezeichnet, bilde man analog durch Vertauschung von a mit x:

$$\chi_n(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots$$
$$(13') \qquad - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) - (b-x)^p P_n;$$

dann zerstören sich in der Aufstellung von $\chi_n'(x)$ abermals alle Glieder bis auf die beiden letzten, und es kommt:

$$\chi_n'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + p(b-x)^{p-1} P_n$$
$$(14') \qquad = -(b-x)^{p-1}\left[\frac{(b-x)^{n-1}}{(b-x)^{p-1}} \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} - p P_n\right]$$
$$= -(b-x)^{p-1} p\left[\frac{(b-x)^{n-p} f^{(n)}(x)}{p(n-1)!} - P_n\right].$$

Der Mittelwertsatz liefert jetzt für einen gewissen Mittelwert $\xi = a + \vartheta(b-a)$, $(0 < \vartheta < 1)$:

$$\chi_n'(\xi) = 0,$$

d. i.:

$$(15') \qquad P_n = \frac{(b-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi) = \frac{[b-\{a+\vartheta(b-a)\}]^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi)$$
$$= \frac{(b-a)^{n-p}(1-\vartheta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi).$$

Setzt man diesen Wert von P_n in (12') ein, so nimmt das Restglied die Gestalt an:

$$(17) \qquad (b-a)^p P_n = \frac{(b-a)^p (b-a)^{n-p}(1-\vartheta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi)$$
$$= \frac{(b-a)^n}{p(n-1)!}(1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(\xi).$$

Überraschenderweise stellt sich demnach die n^{te} Potenz von $(b-a)$ von selbst wieder ein, nur dass der Faktor von $(b-a)^n f^{(n)}(a+\vartheta h)$ jetzt nicht mehr $\frac{1}{n!}$, sondern $\frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{p(n-1)!}$ ist.

Da $1-\vartheta$ ebenso wie ϑ einen Wert zwischen 0 und 1 besitzt und da die Absicht besteht, das Restglied, absolut genommen, möglichst klein zu machen, so wird man sich

auf die Werte $p = 1, 2, \ldots, n$ beschränken, von denen der letzte $p = n$ auf (I) zurückführt, und es gilt der Satz:

III. „Unter den nämlichen Voraussetzungen, die der Entwickelung (I) zu Grunde lagen, besteht auch die allgemeinere Entwickelung:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{p(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(a+\vartheta h) \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

(I′)

wo p eine der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeutet. Für $p = n$ reduziert sich (I′) auf (I). Entsprechend treten an die Stelle von (Ia) und (II) die Taylorsche resp. Mac-Laurinsche Entwickelung mit dem allgemeineren, nach *Cauchy* benannten Restgliede:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

$$+ \frac{h^n}{p(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(x+\vartheta h), \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

(Ia)′

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)$$

$$+ \frac{x^n}{p(n-1)!} (1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(\vartheta x), \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

(II′)

Der für die Anwendungen wichtigste Fall tritt für $p=1$ ein. Dann schreibt sich das Restglied von (Ia)′ in der Gestalt:

$$(18)\quad h\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\vartheta)^{n-1}f^{(n)}(x+\vartheta h),\quad (0<\vartheta<1).$$

Sieht man von dem festen Faktor h ab, so ist der letzte Faktor $f^{(n)}(x+\vartheta h)$ von derselben Natur, wie in (Ia), desgleichen zeigt $\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}$ im wesentlichen dieselbe Eigenschaft, wie $\frac{h^n}{n!}$ in (Ia), nämlich, wie dieses, bei wachsendem n gegen Null zu konvergieren: dazu tritt aber jetzt als neu der Faktor $(1-\vartheta)^{n-1}$, der seinerseits im allgemeinen*) bei wachsendem n gegen Null konvergieren wird und sehr wohl die Möglichkeit zulässt, mit $f^{(n)}(x+\vartheta h)$ vereinigt, ein Produkt zu liefern, dessen Absolutwert bei wachsendem n eine feste Grenze nicht überschreitet, wenn das leztere auch für $f^{(n)}(x+\vartheta h)$ allein nicht nachweisbar sein sollte.

Wir lassen zunächst einige Anwendungen der Formeln (I) resp. (Ia) folgen.

Unter Zugrundelegung der Taylorschen Entwickelung (Ia) lassen sich die in §§ 17, 18 unter Benutzung des Mittelwertsatzes geführten Beweise für die Regeln I daselbst hinsichtlich der Unbestimmtheitswerte resp. der extremen Werte durchsichtiger gestalten.

Denn liegen erstens zwei Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ vor, die für ein Intervall $(a,\ a+h)$ die in § 17 gemachten Stetigkeits- und Existenz-Voraussetzungen befriedigen, so hat man:

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$$

$$=\frac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta h)}{\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)}$$

$$(0<\vartheta<1),\ (0<\vartheta_1<1).$$

*) Es kann nämlich der Fall eintreten, dass ϑ bei wachsendem n selbst gegen Null, und damit $(1-\vartheta)^{n-1}$ gegen Eins konvergiert.

Wenn jetzt im besonderen f und φ nebst ihren ersten $n-1$ Ableitungen für $x=a$ verschwinden, nicht aber zugleich die n^{ten} Ableitungen von f und φ, so geht aus (19) unmittelbar hervor, dass:

$$(20)\qquad \lim_{h=0}\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\lim_{h=0}\frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)}{\varphi^{(n)}(a+\vartheta_1 h)}=\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}.$$

Zweitens mögen, wiederum unter den Stetigkeits- und Existenz-Voraussetzungen des § 18, für $x=a$ die $n-1$ ersten Ableitungen von $f(x)$ verschwinden, nicht aber die n^{te}, so kommt für ein hinreichend kleines (positives) h:

$$(20)\qquad \begin{aligned} f(a+h)-f(a)&=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta h)\ (0<\vartheta<1),\\ f(a-h)-f(a)&=\frac{(-h)^n}{n!}f^{(n)}(a-\vartheta_1 h)\ (0<\vartheta_1<1). \end{aligned}\qquad (f^{(n)}(a)\neq$$

Danach sind die links stehenden Differenzen für ein gerades n gleichnamig, für ein ungerades n ungleichnamig: es tritt also im ersten Falle ein Maximum resp. Minimum von f für $x=a$ ein, je nachdem $f^{(n)}(a)$ einen negativen resp. positiven Wert hat; im zweiten Falle dagegen liegt kein extremer Wert von f für $x=a$ vor, sondern die Funktion ist daselbst in der Ab- resp. Zunahme begriffen.

Ferner wird man sich mit Vorteil der Taylorschen Entwickelung für $n=2$ bedienen*), um eine in einzelnen Fällen bereits in den §§ 8—12**) behandelte Aufgabe allgemeiner zu erledigen: „Man soll den absoluten Unterschied $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)\right|=\left|\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-\frac{df(x)}{dx}\right|$ für ein geeignetes Δx und für ein ganzes vorgelegtes Intervall

*) Dazu würde auch schon die Entwickelung (1) genügen, doch fallen dann die Näherungsabschätzungen weniger genau aus.

**) In diesem Sinne war untersucht worden: $\sin x$ in (Ia), § 9; $\operatorname{tg} x$ in (24a), § 9; $\arcsin x$ in (22), § 10; $\operatorname{arctg} x$ in (25), § 10; a^x in (60), (62), § 12; $\lg_a x$ in (68), (72), § 12; eine ganze Funktion $G(x)$ in (7a), § 8. Ein Vergleich der dort erhaltenen Ergebnisse mit denen dieses Paragraphen lehrt sofort, inwieweit die letzteren einfacher sind; wo das scheinbar nicht der Fall ist, liegt das daran, dass das damals *zu Grunde* gelegte Intervall (a, b) zu Gunsten der Ausführbarkeit der *Rechnung* jeweils speziellen Beschränkungen unterworfen wurde.

b), dem x, $x + \Delta x$ angehören mögen, unter eine beliebig kleine (positive) vorgegebene Grösse ε herunterrücken".

Da

$$1) \quad \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \frac{\Delta x}{2} f''(x + \vartheta \Delta x) \quad (0 < \vartheta < 1),$$

so hat man nur einen zweckmässigen positiven Wert M aufzusuchen, den $|f''(x)|$ im Intervalle (a, b) nicht überschreitet, dann genügt $\frac{|\Delta x|}{2} M < \varepsilon$, d. i. $|\Delta x| < \frac{2\varepsilon}{M}$ der aufgestellten Forderung. Eine Reihe einfacher Funktionen möge daraufhin geprüft werden; der Vergleich mit den in den §§ 8—12 auf elementarem Wege untersuchten Fällen wird den Vorzug der neuen Methode zur Genüge hervortreten lassen. Mit Rücksicht auf die vorbereitenden Betrachtungen des § 16 wird zumeist schon die Angabe der jeweiligen zweiten Ableitung ausreichen, um die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe hinzuschreiben.

1. $f(x) = \sin x$. Das Intervall (a, b) ist ganz beliebig. Da $(\sin x)'' = -\sin x$, so wird sofort:

$$22) \quad \left| \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} - \frac{d \sin x}{dx} \right| \leqq \frac{1}{2} |\Delta x| .$$

Analog $\cos x$.

2. $f(x) = \operatorname{tg} x$. Das Intervall sei $(0, b)$, $|b| < \frac{\pi}{2}$.

Da $(\operatorname{tg} x)'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$, so kommt:

$$23) \quad \left| \frac{\Delta \operatorname{tg} x}{\Delta x} - \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} \right| < \frac{|\Delta x|}{\cos^3 b} .$$

Analog $\operatorname{cotg} x$.

3. $f(x) = \arcsin x$ in einem Intervalle $(0, b)$, $|b| < 1$.

Es ist $(\arcsin x)'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)' = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$; da für $= b$ $|x|$ seinen grössten und zugleich $\sqrt{(1 - x^2)^3}$ seinen einsten Wert annimmt, so hat man:

$$(24) \qquad \left|\frac{\Delta \arcsin x}{\Delta x} - \frac{d \arcsin x}{dx}\right| \leq \frac{|\Delta x|}{2} \frac{|b|}{\sqrt{(1-b^2)^3}}.$$

Analog $\arccos x$.

4. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ in einem Intervalle $(0, b)$, wo b beliebig. Es ist $(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$; es nimmt $|x|$ seinen grössten Wert für $x = b$ an, $(1+x^2)^2$ seinen kleinsten Wert für $x = 0$, es wird also jedenfalls:

$$(25) \qquad \left|\frac{\Delta \operatorname{arctg} x}{\Delta x} - \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx}\right| < |\Delta x|\ |b|.$$

Indessen erweist sich diese Ungleichung für praktische Zwecke nur bei verhältnismässig kleinem $|b|$ als zweckmässig. Denn die Behandlung der Aufgabe Nr. 10 in § 18 zeigte, dass $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ nur ein Maximum $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{9}{16}$ für $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, und nur ein Minimum $-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{16}$ für $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ besitzt, somit der absolute Wert von $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ nur ein Maximum $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{9}{16} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}974\ldots$ für $|x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Sobald daher $|b| > \frac{1}{3}$, wird man an die Stelle von (25) die vorteilhaftere Ungleichung zu Grunde legen:

$$(25\text{a}) \qquad \left|\frac{\Delta \operatorname{arctg} x}{\Delta x} - \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx}\right| < \frac{1}{3}|\Delta x|.$$

Analog $\operatorname{arccotg} x$.

5. $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, in einem Intervalle $(0, b)$.

Da $(a^x)'' = a^x (la)^2$, so ergiebt sich, parallel den Formeln (7), (8) des § 18:

$$(26) \begin{cases} \left|\frac{\Delta a^x}{\Delta x} - \frac{da^x}{dx}\right| \leq \frac{|\Delta x|}{2} a^b (la)^2, & a > 1,\ b > 0 \text{ oder } a < 1,\ b \\ \left|\frac{\Delta a^x}{\Delta x} - \frac{da^x}{dx}\right| \leq \frac{|\Delta x|}{2} (la)^2, & a < 1,\ b > 0 \text{ oder } a > 1,\ b \end{cases}$$

6. $f(x) = \lg_a x\ (a > 0)$ in einem Intervalle (α, β), $\alpha > 0$, $\beta > \alpha$.

Da $(\lg_a x)'' = \left(\frac{1}{x}\frac{1}{la}\right)' = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{la}$, so wird, parallel der Formel (9) des § 18:

$$\left|\frac{\Delta \lg_a x}{\Delta x} - \frac{d \lg_a x}{dx}\right| \leqq \frac{|\Delta x|}{2}\frac{1}{|la|}\frac{1}{a^2}. \tag{27}$$

7. $f(x) = x^n$ (x positiv, $\gtrless 1$), in einem Intervall (a, b), $a > 0$, $b > a$.

Aus $(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$ folgt, parallel den Formeln (10), (11) des § 18:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\Delta x^n}{\Delta x} - \frac{dx^n}{dx}\right| \leqq \frac{|\Delta x|}{2} n(n-1) b^{n-2},\ n \geqq 2, \\ &\left|\frac{\Delta x^n}{\Delta x} - \frac{dx^n}{dx}\right| \leqq \frac{|\Delta x|}{2} |n(n-1)|\, a^{n-2},\ n < 2. \end{aligned} \tag{28}$$

In den trivialen Fällen $n = 0, 1$ gilt nur das Gleichheitszeichen; für $n = 0$ ist $x^n = 1$, $\frac{\Delta 1}{\Delta x}$ und $\frac{d1}{dx} = 0$; für $n = 1$ ist $x' = x$, $\frac{\Delta x}{\Delta x}$ und $\frac{dx}{dx} = 1$.

8. $f(x) = G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ in einem Intervalle (a, b), $b > a$.

Da $G''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}$, so gilt analog zu (14) § 18, wenn wieder $\alpha_i = |a_i|$ und β den nicht kleineren der beiden Werte $|a|$, $|b|$ bedeutet:

$$\left|\frac{\Delta G(x)}{\Delta x} - \frac{dG(x)}{dx}\right| \leqq \frac{|\Delta x|}{2}(2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 \beta + \ldots + n(n-1) a_n \beta^{n-2}). \tag{29}$$

§ 20. Entwickelungen einzelner Funktionen von einer Variabeln nach der Taylorschen resp. Maclaurinschen Reihe.

Die Reihenentwickelungen des vorigen Paragraphen mögen an einer Reihe wichtiger Funktionen im Einzelnen durchgeführt werden. Die unter dem vorliegenden Gesichtspunkte einfachsten Funktionen sind der Sinus, der Cosinus und die

Exponentialfunktion, da sie, nebst ihren beliebig weit genommenen Ableitungen, in jedem endlichen Intervalle die Eigenschaft der Stetigkeit besitzen, und da überdies diese Ableitungen ohne weiteres hingeschrieben werden können.

1. $y = f(x) = \sin x$.

Man hat unmittelbar:

$$(1)\qquad \begin{gathered} y = \sin x,\ y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x, \\ y^{(4)} = \sin x,\ y^{(5)} = \cos x,\ \ldots, \end{gathered}$$

sodass die vier Werte $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ periodisch wiederkehren. Nach Ia (§ 19) ist daher in der Entwickelung für $\sin(x+h)$ der absolute Wert des Lagrangeschen Restgliedes R_n gleich dem absoluten Werte von $\frac{h^n}{n!}\sin(x+\vartheta h)$ resp. $\frac{h^n}{n!}\cos(x+\vartheta h)(0<\vartheta<1)$, und da der absolut grösste Wert des Sinus wie des Cosinus die positive Einheit ist, so wird:

$$(2)\qquad |R_n| \leqq \frac{|h|^n}{n!},$$

sinkt also (s. § 12, (39), (40)) bei genügend gross gewähltem n unter jede noch so kleine vorgegebene (positive) Grösse ε.

Somit kommt als Taylorsche Reihe für den Sinus:

$$(I)\qquad \begin{aligned} \sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x \\ + \frac{h^4}{4!}\sin x + \frac{h^5}{5!}\cos x - \frac{h^6}{6!}\sin x \ldots; \end{aligned}$$

bricht man hinter dem Gliede mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz von h ab, so genügt das Restglied der Ungleichung (2).

Von hier geht man sofort zur Maclaurinschen Reihe für $\sin x$ über; da $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, so wird nach § 19, (II):

$$(Ia)\qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots;$$

bricht man hinter dem Gliede $\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ab — dessen Vorzeichen das positive oder negative ist, je nachdem n ungerade

oder gerade — so gilt für das Lagrangesche Restglied $R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(\vartheta x)$ $(0 < \vartheta < 1)$:

$$|R_{2n+1}| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3}$$

Dass hier in der That das eventuelle Gleichheitszeichen von (2) in Wegfall kommt, sieht man so ein. Da der Fall eines negativen x mit Rücksicht auf $\sin(-x) = -\sin x$ auf den eines positiven x zurückkommt, so kann man sich auf letzteres beschränken. Sei etwa n gerade, so entwickele man das Restglied R_{2n+1} gemäss § 19 (II) um zwei Stellen weiter:

$$R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+5)!} + R_{2n+5}, \tag{3a}$$

$$|R_{2n+5}| \leqq \frac{x^{2n+5}}{(2n+5)!}.$$

Wie in § 12 (39), (40) gezeigt, nehmen die Grössen $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}, \ldots$, wie gross auch der Wert von x sei, von einer gewissen Stelle ab — sobald nämlich $2n+1 > x$ — successive und bei beliebig wachsendem Index beliebig gegen Null ab.

Denkt man sich demnach n bereits so gross gewählt, dass $2n+1 > x$, d. i. $n > \frac{x-1}{2}$, so folgt aus (3a), dass um so mehr:

$$R_{2n+1} \leqq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + \frac{x^{2n+5}}{(2n+5)!}, \tag{3b}$$

und somit auf Grund des Satzes § 12 (22) R_{2n+1} sicher kleiner als das erste Glied rechts von (3b):

$$R_{2n+1} < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3c}$$

Ist dagegen n ungerade, so wird R_{2n+1} negativ und man hat nur R_{2n+1} in (3c) durch seinen absoluten Wert zu ersetzen.

Offenbar lässt sich dieser Gedankengang ohne weiteres auf den allgemeineren Fall (A)

ausdehnen, wo die Maclaurinsche Entwickelung einer Funktion $f(x)$ eine alternierende Reihe (s. § 12, (22a)) von der Form $\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \ldots$ liefert, in der die λ positive Grössen bedeuten, die gliedweise und bei beliebig wachsendem Index gegen Null abnehmen, mit der Eigenschaft, dass, wenn man die Entwickelung hinter λ_{n-1} abbricht, der absolute Wert des Restgliedes $R_n \leqq \lambda_n$ ausfällt. Dann ist $|R_n| \leqq \lambda_n - \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2}$, mithin gemäss § 12, (22) $|R_n| < \lambda_n$.

Demnach ist die beliebig weit fortsetzbare Entwickelung (Ia) für $\sin x$ eine alternierende, und zwar, wenigstens von einer gewissen Stelle ab, mit demselben Gesetze, wie für die alternierenden Aggregate des Satzes § 12, (22a), d. h. bricht man hinter irgend einem Gliede ab, so ist der begangene Fehler, absolut genommen, kleiner als der absolute Wert des nächstfolgenden Gliedes. In diesem Sinne gilt also:

„Für ein genügend grosses n $\left(n > \frac{|x|-1}{2}\right)$ leistet die nach dem Gesetze (Ia) beliebig weit fortsetzbare Entwickelung von $\sin x$ ohne Kenntnis des Lagrangeschen Restgliedes dasselbe wie die nämliche Entwickelung mit dem Gesetze (3) des Lagrangeschen Restgliedes."

Ganz analog verläuft die Betrachtung von:

2. $y = \cos x$.

Man hat:

$$(4) \quad \begin{gathered} y = \cos x, \quad y' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x, \quad y''' = \sin x, \\ y^{(4)} = \cos x, \quad y^{(5)} = -\sin x, \ \ldots, \end{gathered}$$

so dass die vier Werte $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ periodisch wiederkehren. Für das Lagrangesche Restglied der Taylorschen Reihe gilt genau dieselbe Betrachtung, die zu Ungleichung (2) führte, und man hat als Taylorsche Reihe für den Cosinus:

$$\text{(II)} \qquad \cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \frac{h^4}{4!}\cos x - \frac{h^5}{5!}\sin x - \ldots,$$

sowie als Maclaurinsche Reihe:

$$\text{(IIa)} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots,$$

wo das Vorzeichen von $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ positiv oder negativ ausfällt, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und wo für das beim Abbrechen hinter $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ auftretende Restglied R_{2n+2} gilt:

$$\text{(5)} \qquad |R_{2n+2}| < \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Ganz wie bei (Ia) lässt sich die beliebig fortgesetzte Entwickelung (IIa) auch ohne Lagrangesches Restglied schreiben; bricht man hinter $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ab, so ist der begangene Fehler, absolut genommen, kleiner als der absolute Wert des nächstfolgenden Gliedes $\pm\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$, gleichgültig, wie viel Glieder man noch hätte folgen lassen.

Vermöge der Taylorschen und Maclaurinschen*) Entwickelung des Sinus und Cosinus lassen sich die bekannten Formeln für das „Additionstheorem der Trigonometrie“ (s. diese Sammlung Bd. III, § 43), die $\sin(x+h)$, $\cos(x+h)$ durch $\sin x$, $\cos x$, $\sin h$, $\cos h$ ausdrücken, für ganz beliebige Werte von x und h unmittelbar einsehen. Es genüge, etwa $\sin(x+h)$ zu betrachten. Indem man sich (I) bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz von h fortgesetzt denkt, wo n

*) Auf demselben Wege kann man aus den Maclaurinschen Entwickelungen für $\sin x$ und $\cos x$ die Existenz der fundamentalen Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ entnehmen. Denn bei beliebig weit fortgesetzter Entwickelung ist stets der Koeffizient von x^{2n} in $\sin^2 x + \cos^2 x - 1$ dasselbe Aggregat von Gliedern, das nach dem binomischen Satze aus $\frac{(1-1)^{2n}}{(2n)!}$ entsteht, also verschwindet, während der Rest unter jede Grenze heruntergedrückt werden kann.

ungerade sein mag, und die zu geraden resp. ungeraden Potenzen von h gehörigen Glieder je zusammenfasst, kommt:

$$\begin{aligned}\sin(x+h) = \sin x\left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \ldots \pm \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\right)\\ + \cos x\left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \ldots \mp \frac{h^{n-2}}{(n-2)!}\right) + R_n.\end{aligned} \tag{6}$$

Da aber der Faktor von $\sin x$ bis auf ein Restglied ϱ_{n+1} mit $\cos h$, und der Faktor von $\cos x$ bis auf ein Restglied P_n mit $\sin h$ übereinstimmt, und da der absolute Betrag von $R_n + \sin x\,\varrho_{n+1} + \cos x\,P_n$ höchstens gleich der Summe der einzelnen absoluten Beträge ist, so entsteht gemäss (2), (4), (5):

$$\begin{aligned}|\sin(x+h) - (\sin x\cos h + \cos x\sin h)| < \frac{|h|^n}{n!}\\ + \frac{|h|^{n+1}\,|\sin x|}{(n+1)!} + \frac{|h|^n\,|\cos x|}{n!} < \frac{3\,|h|^n}{n!},\end{aligned} \tag{7}$$

d. h. die linke Seite sinkt bei beliebig wachsendem n unter jede Grenze. Für ein gerades n tritt nur eine unbedeutende Modifikation ein.

Bei der Exponentialfunktion mit der Basis e (§ 12, (III')):

$$3.\quad y = e^x$$

ist $y = y' = y'' = y''' = \ldots$, mithin resultiert als Taylorsche Reihe:

$$\begin{aligned}e^{x+h} = e^x + he^x + \frac{h^2}{2!}e^x + \frac{h^3}{3!}e^x + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}e^x\\ + \frac{h^n}{n!}e^{x+\vartheta h}\,(0<\vartheta<1),\\ = e^x e^h = e^x\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\right.\\ \left. + \frac{h^n}{n!}e^{\vartheta h}\right),\end{aligned} \tag{III}$$

d. i. also, bis auf die Form des Restgliedes, die bereits in § 12, (Vb) erhaltene Entwickelung. Die Maclaurinsche Entwickelung für e^h ist in (III) durch den Faktor von e mitgegeben; es gilt also, wenn man für h wieder x schreibt

$$\text{(III a)}\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}\, e^{\vartheta x} \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Da im Intervalle $(x \ldots x+h)$ e^x entweder nur zunimmt oder aber nur abnimmt, je nachdem h positiv oder negativ ist, so ist entsprechend der grösste Wert von e^x daselbst e^{x+h} oder aber e^x, der indessen selbst nicht erreicht wird, da die Grenzwerte $\vartheta = 0,\ 1$ ausgeschlossen sind. Somit gilt für das Lagrangesche Restglied R_n der Taylorschen Entwickelung von e^{x+h}:

$$\text{(8)}\quad \begin{cases} R_n < \dfrac{h^n}{n!}\, e^{x+h} & (h \text{ pos.}) \\ |R_n| < \dfrac{|h|^n}{n!}\, e^x & (h \text{ neg.}), \end{cases}$$

aus denen die korrespondierenden Ungleichungen für das Restglied der Maclaurinschen Entwickelung für e^h durch Nullsetzen von x hervorgehen; die linken Seiten von (8) haben wiederum für $\lim n = \infty$ den Grenzwert Null. Im besonderen resultiert für $h = 1$, bis auf die Form des Restgliedes, die alte Entwickelung (§ 12, (13)) für die Basis der natürlichen Logarithmen:

$$\text{(9)}\quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + R_n, \quad R_n < \frac{e}{n!}.$$

Man bemerkt durch Vergleichung, dass die damals erhaltenen Fehlerregeln eine feinere Abschätzung gestatten.

Die parallel laufenden Entwickelungen für die allgemeinere Exponentialfunktion a^x gehen (wie in § 12, (VI)) aus den obigen unmittelbar hervor, sobald man daselbst x durch $x\,la$ ersetzt.

Wir kommen jetzt zur Untersuchung des Logarithmus und der Potenz, die manches Gemeinsame darbieten. Die Diskussion der höheren Ableitungen verursacht keine Schwierigkeit; indessen wird es notwendig werden, die Cauchysche Ergänzungsentwickelung III des § 19 heranzuziehen.

4. Der Logarithmus.

Da sich $\lg^a x$ und lx nur um den konstanten Faktor la unterscheiden (s. § 12, S. 127), so kann man sich auf die Reihenentwickelung des natürlichen Logarithmus beschränken. Da weiter $l(a+h) = l\left\{a\left(1+\frac{h}{a}\right)\right\} = la + l\left(1+\frac{h}{a}\right)$, so genügt wiederum die Untersuchung von $l(1+x)$, wo $|x| \leqq 1$, für die man sich entweder der Taylorschen oder Maclaurinschen Formel bedienen kann. Für $x = -1$ wird $l(0) = -\infty$, somit ist bei negativem x von vornherein die Beschränkung auf $|x| < 1$ geboten, während bei positivem x noch der Grenzfall $x = 1$ von Interesse ist.

Die successiven Ableitungen von $y = lx$ sind:

$$(10)\qquad \begin{gathered} y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \\ y''' = +2\cdot x^{-3}, \quad y^{(4)} = -2\cdot 3\cdot x^{-4}, \\ y^{(5)} = +4!\,x^{-5}, \ldots, \quad y^{(n)} = \pm(n-1)!\,x^{-n}, \end{gathered}$$

wo das positive resp. negative Vorzeichen gilt, je nachdem n ungerade resp. gerade ist. Demnach ergiebt sich aus (Ia) oder auch aus (II) (§ 19) die Reihenentwickelung:

$$(IV)\qquad \begin{gathered} l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \\ \pm\frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{x^n}{n}(1+\vartheta x)^{-n} \end{gathered}$$

$$\left\{0 < \vartheta < 1;\ \begin{matrix}\text{oberes Vorzeichen bei geradem } n \\ \text{unteres Vorzeichen bei ungeradem } n\end{matrix}\right\}.$$

Hier ist das Restglied zu prüfen, das sich, vom Vorzeichen abgesehen, in die Form setzen lässt:

$$(11)\qquad R_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n.$$

Sei zunächst x positiv, $\leqq 1$. Dann ist $\frac{x}{1+\vartheta x} \leqq x$, es wird also:

$$(12)\qquad R_n < \frac{x^n}{n}.$$

Somit hat R_n bei beliebig wachsendem n den Grenzwert Null, auch noch für $x = 1$. Die Voraussetzungen der Reihe (IV) sind erfüllt, da $l(1+x)$, wie auch die n^{te} Ableitung von $l(1+x)$, nämlich $\pm (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}$ für jedes natürliche n im Intervalle $x = 0$ bis $x = 1$ stetig verläuft. Diese Voraussetzungen sind offenbar auch noch (für das Intervall von 0 bis x) erfüllt, wenn $x > 1$. Indessen erkennt man leicht, dass in diesem Falle die Reihenentwickelung für $l(1+x)$ divergiert, d. h. dass $|R_n|$ bei wachsendem n über alle Grenzen wächst. Denn gesetzt das Gegenteil fände statt, so könnte, da $R_n = \frac{x^n}{n} + R_{n+1}$, auch $\frac{x^n}{n}$ mit wachsendem n nicht unendlich gross werden, was doch der Fall ist (s. § 12, (39), (40)). Der nämliche Schluss gilt ersichtlich immer, wenn das n^{te} Glied der Taylorschen resp. Maclaurinschen Reihenentwickelung für $\lim n = \infty$ unendlich gross wird. Ebenso folgert man umgekehrt, dass stets, wenn $\lim |R_n| = 0$, auch das n^{te} Glied der Reihenentwickelung gegen Null konvergieren muss.

Die Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \frac{x^4}{4} \pm \cdots$$

ist vom ersten Gliede an eine alternierende, deren Glieder successive und bei beliebig wachsendem n beliebig abnehmen, und ihr Fehlergesetz stimmt mit (12) überein, so dass man wiederum in der Entwickelung (IV) die Kenntnis des Restgliedes entbehren kann.

Im besonderen hat man für $x = 1$:

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots \tag{13}$$

Nunmehr sei x negativ, $= -z$, wo $z < 1$, dann wird der in (11) auftretende Quotient

$$\frac{x}{1+\vartheta x} = -\frac{z}{1-\vartheta z} = -\frac{1}{\frac{1}{z} - \vartheta}.$$

Solange $\frac{1}{z} > 2$ d. h. $z < \frac{1}{2}$, bleibt der absolute W von $\frac{x}{1+\vartheta x}$, d. i. $\frac{1}{\frac{1}{z} - \vartheta}$ unterhalb der Einheit, da:

$$\frac{1}{\frac{1}{z} - \vartheta} < \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} < \frac{z}{1-z},$$

und es konvergiert wiederum $|R_n|$ für wachsendes n g Null, insofern jetzt an die Stelle von (12) tritt:

$$|R_n| < \frac{1}{n}\left(\frac{z}{1-z}\right)^n, \quad z = |x| < \frac{1}{2}, \tag{14}$$

während die zugehörige Reihenentwickelung für $l(1$ lautet:

$$l(1+x) = l(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots$$
$$- \frac{z^{n-1}}{n-1} - |R_n| \; (0 \leqq z < \tag{IVa}$$

Auch für $z = \frac{1}{2}$ hat noch $|R_n| < \frac{1}{n}$ für $\lim n = \infty$ den Gr wert Null.

Ist dagegen wiederum x negativ, $= -z$, wo aber z zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 enthalten ist, so versagt der Schluss, der absolute Wert von $\frac{x}{1+\vartheta x} \leqq 1$ bleibt. Zieht man dessen die Ergänzungsentwickelung III des § 19 mit Cauchyschen Restgliede (18) daselbst heran, so nimmt Restglied $-R_n$ die Gestalt an:

$$-R_n = z^n \cdot (1-\vartheta)^{n-1}(1-\vartheta z)^{-n}$$
$$= \frac{z^n}{1-\vartheta z} \cdot \left(\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z}\right)^{n-1}. \tag{15}$$

Hier ist der Quotient $\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z} \leqq 1$; ersetzt man au dem den Nenner $1 - \vartheta z$ durch seine untere Grenze 1 so hat man um so mehr:

(16) $$-R_n < \frac{z^n}{1-z},$$

so dass $-R_n$ d. h. der absolute Wert des Restgliedes bei wachsendem n gegen Null konvergiert, während die Entwickelung für $l(1-z)$ im übrigen dieselbe bleibt, wie in (IVa). Die durch (16) gelieferte Abschätzung des Fehlers $|R_n|$ lässt sich noch verfeinern. Denn setzt man die Entwickelung (IVa) um p weitere Stellen fort, so wird:

$$|R_n| < \frac{z^n}{n} + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots + \frac{z^{n+p-1}}{n+p-1} + \frac{z^{n+p}}{n+p}$$

$$< \frac{z^n}{n}(1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1}) + \frac{z^{n+p}}{n+p},$$

mithin nach § 2, (I):

$$|R_n| < \frac{z^n}{n}\,\frac{1}{1-z} + \frac{z^{n+p}}{n+p}.$$

Denkt man sich hier n festgehalten, während p über alle Grenzen wächst, so konvergiert $\frac{z^{n+p}}{n+p}$ gegen Null, und an die Stelle von (16) tritt:

(16a) $$-R_n = |R_n| < \frac{1}{n} \cdot \frac{z^n}{1-z}.$$

Dieser Schluss lässt sich auf den allgemeineren Fall ausdehnen, wo eine Taylorsche oder Maclaurinsche Entwickelung vorliegt von der Gestalt:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_i + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1} + R_{n+p},$$

bei der, wenigstens von einer gewissen Stelle, von u_i an, alle Glieder das nämliche Vorzeichen haben, also etwa alle positiv sind, und wo von einer weiteren Stelle, von u_n ab $(n \geqq i)$, stets die Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$, ..., unter einer angebbaren festen positiven Grösse ε bleiben, die kleiner als 1, und wo $\lim_{p=\infty} R_{n+p} = 0$ ist. Denn aus:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \varepsilon, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \varepsilon \ldots$$

folgt durch resp. Multiplikation der zwei, drei, . . . erste dieser Ungleichungen:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon, \quad \frac{u_{n+2}}{u_n} < \varepsilon^2, \quad \frac{u_{n+3}}{u_n} < \varepsilon^3, \ \ldots$$

Schreibt man das (Lagrangesche oder Cauchysche) Restglied R_n in der Gestalt:

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1} + R_{n+p}$$
$$= u_n\left(1 + \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{u_{n+2}}{u_n} + \ldots + \frac{u_{n+p-1}}{u_n}\right) + R_{n+p},$$

so wird:

$$R_n < u_n(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{p-1}) + R_{n+p}$$
$$< \frac{u_n}{1-\varepsilon} + R_{n+p},$$

mithin, da $\lim_{p=\infty} R_{n+p} = 0$:

$$R_n < \frac{u_n}{1-\varepsilon}. \tag{16b}$$

Hier ist nur auf beiden Seiten der absolute Wert zu nehmen, falls alle Glieder u (von u_i an) negativ wären.

Es gilt also der Satz:

> (B.) „Sind in einer Taylorschen oder Maclaurinschen Entwickelung $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ alle Glieder, wenigstens von einer gewissen Stelle ab, gleichnamig, bleibt ferner, von einer weiteren Stelle ab, stets der Quotient eines Gliedes durch das vorhergehende unterhalb einer angebbaren festen positiven Grösse ε, die < 1, und konvergiert überdies das Restglied bei wachsendem Index gegen Null, so ist $|R_n| < \frac{|u_n|}{1-\varepsilon}$."

Die Entwickelungen (IV), (IVa) sind offenbar für eine praktische Berechnung der Logarithmen wenig geeignet, da sie nur „langsam konvergieren", d. h. man bedürft

einer ausserordentlich grossen Anzahl von Gliedern, um auch nur eine mässige Annäherung zu erzielen. Zieht man jedoch (IVa) von (IV) ab, so gelangt man wegen $l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x}$ zu der bereits besseren Entwickelung*) für den natürlichen Logarithmus:

$$\text{(IVb)} \quad \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \; (x \text{ pos., } < 1).$$

Behufs Anwendung von (IVb) denke man sich den Logarithmus lN einer ersten Zahl N (z. B. $N = 1$) bereits bekannt; um dann den Logarithmus $l(N+h)$ einer grösseren Zahl $N+h$ zu finden, bringe man die Differenz beider, nämlich $l(N+h) - lN = l\frac{N+h}{N} = l\left(1 + \frac{h}{N}\right)$ auf die Form $l\frac{1+x}{1-x} = l\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)$; man setze demnach $\frac{2x}{1-x} = \frac{h}{N}$, woraus $x = \frac{h}{2N+h}$, also von selbst < 1, hervorgeht. Damit geht (IVb) über in:

$$\text{(IVc)} \quad \frac{1}{2}\{l(N+h) - lN\} = \frac{1}{2} l\left(1 + \frac{h}{N}\right)$$

$$= \frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots$$

Insbesondere ergiebt sich erstens so für $N = 1$, $h = 1$, $\frac{h}{2N+h} = \frac{1}{3}$:

$$\text{(17)} \quad \frac{1}{2} l2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} + \ldots,$$

---

*) Unter Anwendung der Regel (B) ergiebt sich, dass, wenn man die rechte Seite von (IVb) hinter $\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ abbricht, der Rest $R_{n\,2+1}$ kleiner als $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1-x^2}$ ausfällt.

und zweitens, da $10 = 2^3 + 2 = 2^3\left(1+\frac{1}{4}\right)$, also $l10 = 3l$
$+ l\left(1+\frac{1}{4}\right)$, für $N=1$, $h=\frac{1}{4}$, $\frac{h}{2N+h}=\frac{1}{9}$, mithin:*)

*) Auf Grund von (IVc) lassen sich für $l10$ stärker konvergierend Entwickelungen herstellen. Man gelangt zu einer solchen, indem ma eine höhere Potenz von 2 aufsucht, die einem (geeigneten) Multiplum von 10 möglichst nahe kommt. Nun ist $2^{12}=4096$, also:

$$4100 = 2^{12}+2^2 = 2^{12}\left(1+\frac{1}{2^{10}}\right) = 2^{12}\left(1+\frac{1}{1024}\right),$$

andererseits ist:

$$41 = 40\left(1+\frac{1}{40}\right) = 2^2\cdot 10\left(1+\frac{1}{40}\right).$$

Nimmt man also in (IVc) einmal $N=1$, $h=\frac{1}{1024}$, somit $\frac{h}{2N+h}$ $=\frac{1}{2049}$, das andere Mal $N=1$, $h=\frac{1}{40}$, somit $\frac{h}{2N+h}=\frac{1}{81}$, so kommt:

$$l4100 = 2l10 + l41 = 2^{12}\,l\left(1+\frac{1}{1024}\right),$$

$$2l10 + 2l2 + l10 + 2\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{3\cdot 81^3}+\frac{1}{5\cdot 81^5}+\ldots\right)$$

$$= 12l2 + 2\left(\frac{1}{2049}+\frac{1}{3\cdot 2049^3}+\frac{1}{5\cdot 2049^5}+\ldots\right),$$

und setzt man hier für $l2$ seinen Wert aus (18) ein, so ergiebt sich

$$l10 = 20\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\ldots\right)$$
$$+ 6\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{3\cdot 81^3}+\frac{1}{5\cdot 81^5}+\ldots\right)$$
$$- 6\left(\frac{1}{2049}+\frac{1}{3\cdot 2049^3}+\frac{1}{5\cdot 2049^5}+\ldots\right).$$

Benutzt man von diesen drei Klammerentwickelungen resp. die ersten fünf, drei, ein Glieder, so erhält man $l10$ bis auf neun Dezimalstellen genau (die zehnte Stelle differiert um weniger als zwei Einheiten):

$$l10 = 2{,}302\,585\,093\,168\ldots$$

während in Wirklichkeit:

$$l10 = 2{,}302\,585\,092\,994\ldots$$

ist. Da $lx = \overset{10}{lx}\cdot l10$, so liefert der Wert von $l10$ das Mittel, um von irgend einem natürlichen Logarithmus zum entsprechenden *Briggischen* überzugehen, und umgekehrt.

(18) $$l10 = 3 \cdot l2 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^7} + \ldots\right\}.$$

5. Potenz $y = x^m$ mit beliebigem Exponenten m.

Da $(\alpha+\beta)^m = \alpha^m\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)^m$, so genügt es für praktische Zwecke, die Entwickelung von $(1+x)^m$ für $|x|<1$ zu untersuchen. Die successiven Ableitungen von x^m sind:

(19) $$(x^m)' = mx^{m-1},\quad (x^m)'' = m(m-1)x^{m-2},\ \ldots,$$
$$(x^m)^{(i)} = m(m-1)\ \ldots\ (m-i+1)x^{m-i}.$$

Somit werden die Zahlenkoeffizienten der Potenzen x, $x^2, \ldots$ in der Maclaurinschen Entwickelung (II) (§ 19) für $(1+x)^m$ die Binomialkoeffizienten m_1, m_2, $\ldots$ von m (s. § 6):

(V) $$(1+x)^m = 1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \ldots + m_{n-1}x^{n-1} + R_n,\quad 0<|x|<1,$$

wo das Lagrangesche Restglied R_n lautet:

(20) $$R_n = m_n x^n (1+\vartheta x)^{m-n}.$$

Die Voraussetzungen für (V) sind erfüllt, da $(1+x)^m$, wie $\{(1+x)^m\}^{(i)} = m(m-1)\ \ldots\ (m-i+1)x^{m-i}$ für irgend einen Wert x, dessen absoluter Betrag $\geqq 0$ und <1 ist, (und auch noch für $x=1$) stetig sind.

Der besondere Fall, wo m eine natürliche Zahl ist, kann hier ausgeschlossen werden, da er auf den binomischen Satz (§ 6) zurückführt; in der That bricht dann, da $m_{m+1} = m_{m+2} = \ldots = 0$, die Reihe (V) von selbst hinter $m_m x^m = x^m$ ab. Wie beim Logarithmus werden die beiden Hauptfälle eines positiven und eines negativen x zu unterscheiden sein.

(A.) Es sei x positiv, >0 und $\leqq 1$.

Das Restglied R_n (20) lässt sich dann in den Formen schreiben:

(21) $$R_n = m_n\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^n (1+\vartheta x)^m = m_n\left(\frac{1}{\frac{1}{x}+\vartheta}\right)^n (1+\vartheta x)^m.$$

Hier ist $\frac{x}{1+\vartheta x} \leqq x$; da $(1+\vartheta x)^m$ ein von n u
hängiger fester Faktor ist, so bleibt die Frage zu b
worten, ob $|m_n x^n|$ für ein positives $x \leqq 1$ bei beliebig wac
dem n unter jede Grenze sinkt.

Es geschieht das durch einen ähnlichen Gedanken
wie bei dem entsprechenden Nachweise für $\frac{h^n}{n!}$ in § 12 (39),

Sei erstens der Exponent m positiv und zwischen
beiden natürlichen Zahlen m_1 und m_1+1 ($m_1 = 0, 1, 2,$
enthalten. Dann zerlege man das Produkt $m_n x^n$ in d
Faktoren:

$$\frac{m}{1}x \cdot \frac{m-1}{2}x \cdot \frac{m-2}{3}x \ldots \frac{m-k+1}{k}x \ldots$$

$$\frac{m-m_1}{m_1+1}x \cdot \frac{m-(m_1+1)}{m_1+2}x \ldots \tag{22}$$

$$\frac{m-\{m_1+n-m_1-1\}}{n}x.$$

Hier sind die Zahlenfaktoren von x von $\frac{m}{1}$ bis
$\frac{m-m_1}{m_1+1}$ positiv, vom nächsten Gliede an negativ.
absolute Wert der negativen Brüche $-\frac{m_1-m+1}{m_1+2}$,
$-\frac{n-1-m}{n}$ bleibt stets unterhalb der Einheit, wie
n auch sei, mithin der absolute Wert dieser mit x m
plizierten Brüche $< x$.*)

Unter den m_1+1 positiven Brüchen:

$$\frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \ldots, \frac{m-k+1}{k}, \ldots, \frac{m-m_1}{m_1+1}$$

*) Hieraus geht bereits hervor, dass $|m_n x^n| < m_{m_1+1} x^n$, da der letzte positive Bruch von (22), $\frac{m-m_1}{m_1+1}$, stets < 1 ist, $|m_n x^n| < m_{m_1} x^n$, also $|m_n x^n|$ für $\lim n = \infty$ (und $|x| < 1$) Null konvergiert. Die Formel (24) des Textes gestattet indessen feinere Abschätzung.

Das Verfahren des Textes zeigt auch ohne weiteres, dass $|m_n x$ $\lim n = \infty$ und $x > 1$ den Grenzwert ∞ hat, also die Entwick (V) dann divergiert, und das Entsprechende gilt für ein negativ Über den Fall $x = 1$ siehe weiter unten.

uss es einen ersten, etwa den k^{ten}, geben, der <1 aus-illt; die darauf folgenden sind dann um so mehr <1.

Die Zahl k bestimmt sich demnach als die kleinste ıtürliche Zahl, die der Forderung genügt:

3) $$\frac{m-k+1}{k}<1 \text{ i. e. } k>\frac{m+1}{2}.$$

Versteht man daher unter k die erste natürliche Zahl, e den Wert $\frac{m+1}{2}$ übertrifft, so sind unter den m_1+1 ositiven Brüchen der Reihe (22) die ersten $k-1$ grösser s x, die weiteren kleiner als x. Somit gilt für den ab-luten Wert von $m_n x^n$, wie gross auch n sei,

4) $$|m_n x^n|<(m_{k-1}x^{k-1})\cdot x^{n-k+1}\,(m>0),$$

nkt also für ein positives $x<1$ mit wachsendem n unter de Grenze, da dies mit x^{n-k+1} der Fall ist, während $_{k-1}x^{k-1}$ ein fester, von n unabhängiger Faktor ist. Das nämche gilt offenbar auch für ein negatives x, wenn nur $|x|<1$.

Zweitens sei m negativ, $=-\mu$.

Man zerlege, analog zu (22), $m_n x^n$ in die n Faktoren:

25) $$\left(-\frac{\mu}{1}x\right)\left(-\frac{\mu+1}{2}x\right)\left(-\frac{\mu+2}{3}x\right)\ldots$$
$$\left(-\frac{\mu+k-1}{k}x\right)\ldots\left(-\frac{\mu+n-1}{n}x\right).$$

Die Produkte

$$\frac{\mu}{1}x,\quad \frac{\mu+1}{2}x,\quad \frac{\mu+2}{3}x,\quad \ldots\quad \frac{\mu+n-1}{n}x$$

nd alle positiv, und unter ihnen giebt es wiederum ein stes, das k^{te}: $\frac{\mu+k-1}{k}x$, das kleiner wird als die Ein-it. Denn die Forderung:

6) $$\frac{\mu+k-1}{k}x<1 \text{ i. e. } (\mu-1)x<k(1-x)$$

fert für k:

6a) $$k>(\mu-1)\frac{x}{1-x}.$$

Man nehme also k als die erste der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots,$ die (26a) genügt.

Um jetzt zu erkennen, wie sich die auf $\frac{\mu+k-1}{k}x$ folgenden Produkte verhalten, vergleiche man überhaupt irgend zwei successive Brüche der Reihe $\frac{\mu}{1}, \frac{\mu+1}{2}, \ldots, \frac{\mu+n-1}{n}$, etwa den r^{ten} und den $(r+1)^{\text{ten}}$, indem man ihre Differenz bildet:

$$\frac{\mu+r-1}{r} - \frac{\mu+r}{r+1} = \frac{\mu-1}{r(r+1)}. \tag{27}$$

Mithin nehmen, solange $\mu > 1$, die Brüche $\frac{\mu}{1}, \frac{\mu+1}{2}, \ldots, \frac{\mu+n-1}{n}$ bereits vom ersten an gliedweise ab. Bezeichnet man der Kürze halber den in Rede stehenden, zwischen 0 und 1 befindlichen Wert von $\frac{\mu+k-1}{k}x$ mit ε_k, so wird jetzt:

$$|m_n x^n| < |m_{k-1} x^{k-1}|\, \varepsilon_k^{n-k+1}, \tag{28}$$

konvergiert also wiederum für $\lim n = \infty$ gegen Null, solange $|x| < 1$.

In dem ausgeschlossenen Falle $\mu < 1$ nehmen zwar umgekehrt die Brüche $\frac{\mu}{1}, \frac{\mu+1}{2}, \ldots, \frac{\mu+n-1}{n}$ vom ersten an successive zu, bleiben aber stets < 1; endlich für $\mu = 1$ sind alle Brüche gleich 1. Mithin wird für $\mu \leqq 1$:

$$|m_n x^n| \leqq |x^n|, \tag{28'}$$

und es gilt derselbe Schluss wie bei (28).

Somit ist die bezüglich der Konvergenz von $|m_n x^n|$ für ein positives $x < 1$ aufgeworfene Frage in bejahendem Sinne entschieden, und es konvergiert demnach auch der absolute Wert des Restgliedes R_n (21) bei beliebig wachsendem n gegen Null.

Der nämliche Schluss bleibt auch noch, wie beim Logarithmus, bestehen, wenn x zwar negativ, aber $|x| = \xi \leqq \frac{1}{2}$ ist, während sich, wenn ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 gelegen ist,

nichts darüber aussagen lässt, ob $\frac{1}{\xi} - \vartheta$ in (21) kleiner oder grösser als 1 wird.

Man ziehe daher für ein negatives $x = -\xi$, $\xi < 1$, wiederum die Entwickelung III des § 19 mit dem Cauchyschen Restgliede (18) daselbst heran, dann kommt für das Restglied R_n:

$$R_n = m\xi(1-\vartheta\xi)^{m-1}(m-1)_{n-1}\left(\frac{1-\vartheta}{\frac{1}{\xi}-\vartheta}\right)^{n-1}; \tag{30}$$

da hier:

$$\frac{1-\vartheta}{\frac{1}{\xi}-\vartheta} \leqq \xi, \quad \lim_{n=\infty} |(m-1)_{n-1}|\,\xi^{n-1} = 0,$$

so konvergiert in der That $|R_n|$ bei beliebig wachsendem n gegen Null.

Man beachte noch, dass die Entwickelung (V) bei positivem $x(<1)$ von einem gewissen Gliede an, eine alternierende ist; wenn nämlich m positiv ist, zwischen den natürlichen Zahlen m_1 und m_1+1 enthalten, wechseln die Binomialkoeffizienten m_i gemäss (22) vom $(m_1+1)^{\text{ten}}$ inkl. an ihr Vorzeichen; wenn aber m negativ, bereits vom ersten Gliede an. Aus demselben Grunde weist die Entwickelung (V) bei negativem x, von einem gewissen Gliede an, lauter gleichnamige Glieder auf.

Überdies lässt sich n so gross wählen, dass in beiden Fällen der absolute Wert der Glieder in (V) beständig abnimmt. Sei zuerst wieder x positiv (<1), so soll also, von einem gewissen n an, stets $|m_{n+1}|x^{n+1} < |m_n|x^n$ werden, d. h. $\left|\frac{m_{n+1}}{m_n}\right| x = \frac{n-m}{n+1}x < 1$. Für positives m ist das immer der Fall, und auch noch, wenn m negativ und $|m| \leqq 1$; ist aber m negativ und $|m| = \mu > 1$, so liefert die in Rede stehende Forderung:

$$n > \frac{x\mu - 1}{1-x}.$$

Bei negativem $x = -\xi$ ist hier nur x durch ξ zu ersetzen. Denkt man sich daher n in jedem Falle bereits dementsprechend hoch gewählt, so verwende man zur Abschätzung

des Fehlers $|R_n|$ die Regeln (A) S. 265 und (B) S. 274. Bei positivem $x(<1)$ ergiebt sich:

(28a) $$|R_n| < |m_n| x^n,$$

bei negativem $x = -\xi$, $\xi < 1$, wenn $\left|\frac{m_{n+1}}{m_n}\right| \xi = \varepsilon(<1)$ gesetzt wird:

(28b) $$|R_n| < |m_n| \xi^n \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Nunmehr soll auch noch der bisher ausgeschlossene Fall $x=1$ erledigt werden. Gemäss (21) kommt die Frage darauf hinaus, welchen Grenzwert der absolute Wert des Binomialkoeffizienten m_n für beliebig wachsendes n besitzt.

Da dieser Grenzwert für $m=-1$, wie oben bemerkt, gleich der Einheit ist, so liegt es nahe, die beiden Hauptfälle $m+1 \gtrless 0$ von einander zu trennen.

Sei also erstens $m+1<0$, so setze man wiederum $m=-\mu$, wo nunmehr $\mu>1$, so sind gemäss (27) alle Faktoren des Produktes:

$$\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\mu+2}{3}\cdots\frac{\mu+n-1}{n}\cdot\frac{\mu+n}{n+1}\cdot\frac{\mu+n+1}{n+2}\cdots$$
$$\frac{\mu+n+p-1}{n+p}\cdot\frac{\mu+n+p}{n+p+1}\cdots$$

grösser als 1 und nehmen vom ersten an beständig ab.

Greift man daher das Produkt Π von irgend p aufeinander folgenden jener Brüche heraus:

$$\Pi = \frac{\mu+n}{n+1}\cdot\frac{\mu+n+1}{n+2}\cdots\frac{\mu+n+p-1}{n+p},$$

und ersetzt hier jeden der p Brüche durch den letzten, der der kleinste ist, so erhält man die Ungleichheit:

$$\Pi > \left(\frac{\mu+n+p-1}{n+p}\right)^p \text{ i. e. } > \left(1+\frac{\mu-1}{n+p}\right)^p,$$

also um so mehr, nach der in § 1 (8) angewandten Schlussweise:

$$\Pi > 1+\frac{p(\mu-1)}{n+p}.$$

Liesse sich nun nachweisen, dass $\frac{p(\mu-1)}{n+p}$ für ein geeignet hohes p stets eine feste, nur von m abhängige, wenn auch noch so kleine positive Zahl $\frac{1}{s}(s>1)$ überschreitet, so wäre $\Pi > 1+\frac{1}{s}$, und bei beliebig oftmaliger Wiederholung dieses Verfahrens würde sich sofort ergeben, dass $\lim_{n=\infty}|m_n| > \left(1+\frac{1}{s}\right)^{\nu}$, wo ν eine beliebig grosse natürliche Zahl ist, d. h. dass $\lim_{n=\infty}|m_n| = \infty$ wäre.

Um aber die Bedingung $\frac{p(\mu-1)}{n+p} > \frac{1}{s}$ zu erfüllen, hat man nur $p\{s(\mu-1)-1\} > n$, i. e. $p > \frac{n}{s(\mu-1)-1}$ zu wählen. Das ist stets möglich, sobald $s(\mu-1)-1$ positiv, d. h. sobald $\mu - 1 > \frac{1}{s}$ ausfällt; da aber nach Voraussetzung $\mu - 1$ positiv ist, so lässt sich offenbar stets eine positive Grösse s derart annehmen. Also ist in der That $\lim_{n=\infty}|m_n| = \infty$.

Danach spricht im zweiten Hauptfalle $m+1>0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jetzt $\lim_{n=\infty} m_n = 0$ wird.

Bildet man wiederum die Reihenfolge der Faktoren:

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3},\ldots,$$

so sind dieselben von einer gewissen Stelle an, sobald $n>m$, negativ, also deren absolute Werte:

$$\frac{n-m}{n+1},\ \frac{n-m+1}{n+2},\ldots,\frac{n+p-1-m}{n+p},\ldots$$

sämtlich kleiner als 1 und, gemäss (27), fortwährend zunehmend.

Greift man demnach für irgend ein $n>m$ wiederum das Produkt Π von p aufeinander folgenden jener Brüche heraus:

$$\Pi = \frac{n-m}{n+1}\cdot\frac{n-m+1}{n+2}\cdot\ldots\frac{n+p-1-m}{n+p},$$

so ist jetzt der letzte Bruch von allen der grösste, und r hat die Ungleichung:

$$\Pi < \left(\frac{n+p-1-m}{n+p}\right)^p.$$

Es handelt sich um den Nachweis, dass man p, wie gr auch n sei, stets so hoch wählen kann, dass $\left(\frac{n+p-1-}{n+p}\right.$ unter einen festen (nur von der Grösse m abhängigen) pc tiven echten Bruch ε heruntergedrückt wird, oder, was dasse ist, dass man $\left(\frac{n+p}{n+p-1-m}\right)^p$ stets grösser machen ka als $\frac{1}{\varepsilon}$.

Nun ist:

$$\frac{n+p}{n+p-1-m} = \frac{n+p-(m+1)+(m+1)}{n+p-(m+1)}$$
$$= 1 + \frac{m+1}{n+p-(m+1)},$$

mithin ist die vorliegende Aufgabe die nämliche, wie die ersten Hauptfalle $m+1<0$ behandelte: man hat nur dort auftretenden Grössen $\mu-1$ und n durch $m+1$ r $n-(m+1)$ zu ersetzen. Sobald daher $n>m+1$ gew ist, und eine positive Grösse s derart angenommen, d $m+1>\frac{1}{s}$, was nach Voraussetzung $m+1>0$ im möglich ist, so bestimmt sich p durch die Forderung:

$$p > \frac{n-(m+1)}{(m+1)s-1}.$$

Damit ist aber, wenn man das eingeschlagene Verfah beliebig oft wiederholt, bewiesen, dass, wenn man den ab luten Wert des Produktes der ersten $n-1$ Faktor

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdots \frac{m-n+2}{n-1}$$

mit A bezeichnet, $\lim_{n=\infty} |m_n| < A\left(\frac{s}{s+1}\right)^\nu$ ist, wo ν eine

liebig hohe natürliche Zahl bedeutet. Also ist in der That für $m+1>0$ $\lim_{n=\infty} m_n = 0$.

Demnach konvergiert die Entwickelung (V) auch noch für $x=1$, so lange $m+1>0$ (aber nicht mehr, wenn $m+1 \leqq 0$), und es resultiert:

$$(1+1)^m = 2^m = 1 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots \quad (m+1>0).$$

Durch Zusammenfassung der Ergebnisse gelangt man demnach zu folgendem Satze:

„Solange der absolute Wert von x kleiner als die Einheit ist — und für $x=1$ auch noch, falls $m+1>0$ —, gilt die konvergente Entwickelung:

$$(V) \qquad (1+x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots + m_{n-1} x^{n-1} + R_n,$$

die, von einer gewissen Stelle an, alternierende oder aber gleichnamige Glieder aufweist, je nachdem x positiv oder negativ ist, und wo der absolute Wert des Restgliedes den Regeln (28a) resp. (28b) genügt. Hierbei ist n bereits so gross gedacht, dass wenn m positiv und zwischen den natürlichen Zahlen m_1 und m_1+1 enthalten, $n \geqq m_1+1$; wenn m negativ $=-\mu$ und $\mu \leqq 1$, $n \geqq 1$; endlich, wenn m negativ $=-\mu$ und $\mu > 1$,

$$n \geqq \frac{|x|\mu - 1}{1-|x|}.“$$

Die Entwickelung (V) heisst die „binomische Reihe“.

Bemerkenswert ist insbesondere der Fall, wo m das Negative einer natürlichen Zahl μ ist. Dann ergiebt sich aus (Va), als Verallgemeinerung der geometrischen Reihe ($\mu=1$) (§ 2, II):

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \quad (n=1,\ 2,\ 3\ldots).$$

Unter den zahlreichen Anwendungen der binomischen Reihe seien hier zwei hervorgehoben.

Einmal bietet die Reihe ein bequemes Hilfsmittel zur Ausziehung von Wurzeln aus Zahlen. Beispielsweise hat man für $\sqrt[5]{36}$:

$$\sqrt[5]{36} = (32+4)^{\frac{1}{5}} = 2\left(1+\frac{4}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Die ersten fünf Binomialkoeffizienten von $m = \frac{1}{5}$ sind:

$$\left(\frac{1}{5}\right)_1 = \frac{1}{5},\quad \left(\frac{1}{5}\right)_2 = -\frac{2}{25},\quad \left(\frac{1}{5}\right)_3 = \frac{6}{125},\quad \left(\frac{1}{5}\right)_4 = -\frac{21}{625},$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)_5 = \frac{399}{15625},$$

somit wird:

$$\sqrt[5]{36} = 2\left\{1+\left(\frac{1}{5}\right)_1\cdot\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}\right)_2\frac{1}{8^2}+\left(\frac{1}{5}\right)_3\frac{1}{8^3}+\left(\frac{1}{5}\right)_4\frac{1}{8^4}+\left(\frac{1}{5}\right)_5\frac{1}{8^5}+\ldots\right\}$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{40}-\frac{1}{800}+\frac{3}{32000}-\frac{21}{2560000}+\frac{399}{512000000}-\ldots\right).$$

Bricht man hinter dem fünften Gliede ab, so erhält man einen zu kleinen Wert für $\sqrt[5]{36}$, und der Fehler ist kleiner, als das nächstfolgende Glied d. i. $2\cdot\frac{399}{512000000}$, also ca. $1\frac{1}{2}$ Einheiten an der sechsten Dezimalstelle.

Die zweite Anwendung der binomischen Reihe beziehe sich auf die sogenannte Maskelynesche Regel der Trigonometrie (s. etwa das Lehrbuch von Hammer über Trigonometrie, § 23).

Bricht man in der Reihe (I) für $\sin x$ hinter dem ersten Gliede x ab, so hat man die in § 5 untersuchte (erste) Annäherung für $\sin x$. Nimmt man das nächste Glied $-\frac{x^3}{6}$ hinzu, so erhält man in zweiter Annäherung:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} = x\left(1-\frac{x^2}{6}\right).$$

Hier ist der zweite Faktor, $1 - \frac{x^2}{6}$, wiederum in zweiter Annäherung, gemäss (Va), gleich $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, wo die Basis $1 - \frac{x^2}{2}$, abermals in zweiter Annäherung, gemäss (II), durch $\cos x$ ersetzbar ist. Damit ergiebt sich die, für die Vergleichung von Sinus, Cosinus und Bogen äusserst bequeme **Maskelynesche Annäherungsregel:**

$$\sin x = x \sqrt[3]{\cos x},$$

die man für praktische Rechnungen in die logarithmische Gestalt einkleidet:

$$\lg \sin x - \frac{1}{3} \lg \cos x = \lg x.$$

Es soll der Genauigkeitsgrad dieser Regel untersucht werden. Zu dem Behuf könnte man sich der Fehlerregeln für die Entwickelungen (I), (II), (Va) bedienen, zweckmässiger aber erscheint die direkte Anwendung der Maclaurinschen Entwickelung auf die zu behandelnde Differenz:

$$\sin x - x \cos^{\frac{1}{3}} x.$$

Die ersten vier Ableitungen von $\cos^{\frac{1}{3}} x$ sind:

$$\left(\cos^{\frac{1}{3}} x\right)' = -\frac{1}{3} \cos^{-\frac{2}{3}} x \sin x,$$

$$\left(\cos^{\frac{1}{3}} x\right)'' = -\frac{1}{3}\left\{\frac{2}{3} \cos^{-\frac{5}{3}} x \sin^2 x + \cos^{\frac{1}{3}} x\right\},$$

$$\left(\cos^{\frac{1}{3}} x\right)''' = -\frac{1}{3}\left\{\frac{10}{9} \cos^{-\frac{8}{3}} x \sin^3 x + \cos^{-\frac{2}{3}} x \sin x\right\},$$

$$\left(\cos^{\frac{1}{3}} x\right)^{(4)} = -\frac{1}{3}\left\{\frac{80}{27} \cos^{-\frac{11}{3}} x \sin^4 x + 4 \cos^{-\frac{5}{3}} x \sin^2 x + \cos^{\frac{1}{3}} x\right\}$$

$$= -\frac{1}{3} \cos^{\frac{1}{3}} x \left\{\frac{80}{27} \operatorname{tg}^4 x + 4 \operatorname{tg}^2 x + 1\right\}.$$

Mithin liefert die Maclaurinsche Reihe für $-x\cos^{\frac{1}{3}}x$, unter Benutzung des Lagrangeschen Restgliedes für $n=4$:

$$-x\cos^{\frac{1}{3}}x = -x + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^5}{3\cdot 5!}\cos^{\frac{1}{3}}\vartheta x\left\{\frac{80}{27}\operatorname{tg}^4\vartheta x + 4\operatorname{tg}^2\vartheta x + 1\right\} \qquad (0<\vartheta<1).$$

Ersetzt man hier in dem positiven Restgliede — x sei als ein beliebiger Bogen des ersten Quadranten gedacht — $\cos^{\frac{1}{3}}\vartheta x$ und $\operatorname{tg}^2\vartheta x$ durch ihre grössten Werte 1 resp. $\operatorname{tg}^2 x$, und noch $\frac{80}{27}$ durch den grösseren, aber bequemeren Wert $\frac{81}{27}=3$, so erkennt man, dass das fragliche Restglied kleiner ausfällt als $\frac{5}{3}\cdot\frac{x^5}{5!}(3\operatorname{tg}^4 x + 4\operatorname{tg}^2 x + 1)$. Da andererseits nach (I) $x - \frac{x^3}{6}$ für $\sin x$ ebenfalls einen zu kleinen Wert liefert, wobei der Fehler $<\frac{x^5}{5!}$ ausfällt, so liefert die Zusammensetzung beider Ergebnisse die gewünschte Genauigkeitsabschätzung*) der Maskelyneschen Regel:

$$\sin x - x\cos^{\frac{1}{3}}x < \frac{x^5}{5!}\left\{1 + \frac{5}{3}(3\operatorname{tg}^4 x + 4\operatorname{tg}^2 x + 1)\right\}$$

$$\text{i. e.} < \frac{x^5}{3\cdot 5!}(8 + 20\operatorname{tg}^2 x + 15\operatorname{tg}^4 x).\text{**})$$

---

*) Als Beispiele wähle man etwa die den Winkeln von 9° resp. 10° entsprechenden Bögen $x=\frac{\pi}{20}$, resp. $x=\frac{\pi}{18}$. Im ersten Falle liefert die Formel des Textes einen Fehler, der $<0{,}0000023$, im zweiten Falle einen Fehler, der $<0{,}000004$ ist. [In Wirklichkeit fallen die betreffenden Fehler $<0{,}0000022\ldots$ resp. $<0{,}0000036\ldots$ aus].

Es ist also bis zu Winkeln von 9° $\sin x$ durch den zu kleinen Wert $x\sqrt[3]{\cos x}$ ersetzbar, wenn man von einem Fehler absieht, der kleiner ist, als der vierte Teil eines Hunderttausendstel.

**) Mittels derselben Methode würde man, behufs Vergleichung zwischen den dritten Potenzen von $\sin x$ und $x\sqrt[3]{\cos x}$ die elegante Abschätzungsformel erhalten:

$$\sin^3 x - x^3\cos x < \frac{1}{15}x^7.$$

6. $y = \operatorname{arctg} x$.

Indem wir die i^{te} Ableitung von y lieber mit D_i bezeichnen, kommt:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= (1+x^2)^{-1},\\
D_2 &= -2x(1+x^2)^{-2},\\
D_3 &= (1+x^2)^{-3}\{-2(1+x^2)+8x^2\}\\
&= (1+x^2)^{-3}(6x^2-2),\\
D_4 &= (1+x^2)^{-4}\{(1+x^2)12x - 6x(6x^2-2)\}\\
&= (1+x^2)^{-4}24x(1-x^2), \ldots
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Die Fortsetzung des Verfahrens lässt erwarten, dass eine Ableitung D_{2n+1} mit ungeradem Index $2n+1$ das Produkt aus $(1+x^2)^{-(2n+1)}$ und einer ganzen Funktion $\varphi_n(x^2)$ n^{ten} Grades in x^2 sein wird, dagegen eine Ableitung D_{2n+2} mit geradem Index $2n+2$ das Produkt aus $x(1+x^2)^{-(2n+2)}$ in eine andere ganze Funktion $\psi_n(x^2)$ n^{ten} Grades in x^2. In der That sei bewiesen, dass bis zu irgend einem n:

$$D_{2n+1} = (1+x^2)^{-(2n+1)}\varphi_n(x^2),$$

so liefert erneutes Differenzieren:

$$
\begin{aligned}
D_{2n+2} = (1+x^2)^{-(2n+2)}\{&(1+x^2)2x\varphi_n'(x^2)\\
&-(2n+1)\cdot 2x\varphi_n(x^2)\},
\end{aligned}
$$

also D_{2n+2} von der Form $(1+x^2)^{-(2n+2)}x\psi_n(x^2)$. Und durch abermaliges Differenzieren erhält man:

$$
\begin{aligned}
D_{2n+3} = (1+x^2)^{-(2n+3)}[&(1+x^2)\{\psi_n(x^2)+2x^2\psi_n'(x^2)\}\\
&-(2n+2)\cdot 2x^2\psi_n(x^2)],
\end{aligned}
$$

d. h. D_{2n+3} ist von der Form $(1+x^2)^{-(2n+3)}\varphi_{n+1}(x^2)$. Wegen (33) ist also allgemein, wenn man den Zähler von D_ν mit Z_ν bezeichnet:

$$
\begin{cases}
D_{2n+1} = \dfrac{Z_{2n+1}}{(1+x^2)^{2n+1}} = \dfrac{\varphi_n(x^2)}{(1+x^2)^{2n+1}},\\[2ex]
D_{2n+2} = \dfrac{Z_{2n+2}}{(1+x^2)^{2n+2}} = \dfrac{x\psi_n(x^2)}{(1+x^2)^{2n+2}},
\end{cases}
\tag{34}
$$

sodass also Z_ν stets eine ganze Funktion $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist.

Auf grössere Schwierigkeiten stösst die explizite Darstellung der ganzen Funktionen $\varphi_n(x^2)$, $\psi_n(x^2)$. Zu dem Behufe gehen wir auf die erste Formel (33): $D_1 = \frac{1}{1+x^2}$ zurück, um durch eine zweite Methode des Differenzierens ein anderes Gesetz für die D zu erhalten, und dann durch Vergleichung die φ, ψ zu finden. Die wiederholte Differentiation der Identität $D_1(1+x^2) = 1$ ergiebt:

$$(35)\quad \begin{cases} 2xD_1 + (1+x^2)D_2 = 0, \\ 1\cdot 2D_1 + 2\cdot 2xD_2 + (1+x^2)D_3 = 0, \\ 2\cdot 3D_2 + 2\cdot 3xD_3 + (1+x^2)D_4 = 0, \\ 3\cdot 4D_3 + 2\cdot 4xD_4 + (1+x^2)D_5 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Es lässt sich erwarten, dass die allgemeine Rekursionsformel lauten wird:

$$(36)\quad n(n+1)D_n + 2(n+1)xD_{n+1} + (1+x^2)D_{n+2} = 0.$$

In der That sei (36) bis zu irgend einem n gültig, so differenziere man abermals, dann entsteht:

$$\begin{aligned} &n(n+1)D_{n+1} + 2(n+1)D_{n+1} + 2(n+1)xD_{n+2} \\ &\qquad + 2xD_{n+2} + (1+x^2)D_{n+3} \\ &= (n+1)(n+2)D_{n+1} + 2(n+2)xD_{n+2} \\ &\qquad + (1+x^2)D_{n+3} = 0, \end{aligned}$$

d. i. aber die Formel (36) für den Index $n+1$:

„Zwischen drei aufeinander folgenden Ableitungen D_n, D_{n+1}, D_{n+2} von arctg x besteht die Rekursionsformel (36)."

Da für $n = 0$ die erste der Formeln (35) hervorgeht, so ist die Grösse D_n durch (36) völlig definiert, sobald man noch die Festsetzung $D_1 = \frac{1}{1+x^2}$ trifft. Aus (36) lässt sich dann auch leicht wieder das Ergebnis (34) herleiten.

Um die Rekursionsformel (36) zwischen den D in eine ılche zwischen den Z (34) überzuführen, setze man:

$$D_n = Z_n (1 + x^2)^{-n},$$

o ergiebt sich:

37) $$n(n+1)(1+x^2) Z_n + 2(n+1) x Z_{n+1} + Z_{n+2} = 0,$$

woraus speziell für $x = 0$ folgt:

(38) $$Z_{n+2}(0) = -n(n+1) Z_n(0).$$

Differenziert man andererseits die Identität:

$$D_{n+1} = Z_{n+1}(1 + x^2)^{-(n+1)},$$

so entsteht:

$$\begin{aligned} D_{n+2} &= Z_{n+2}(1+x^2)^{-(n+2)} \\ &= -2x(n+1)(1+x^2)^{-(n+2)} Z_{n+1} \\ &\quad + (1+x^2)(1+x^2)^{-(n+2)} Z'_{n+1}, \end{aligned} \tag{39}$$

und subtrahiert man diese Formel von (37), so gelangt man zu der einfachen Rekursionsrelation:

(40) $$Z'_{n+1} = -n(n+1) Z_n.$$

Man denke sich jetzt Z_{2n+1} gemäss (34) als ganze Funktion n^{ten} Grades von x^2 mit unbekannten Koeffizienten angesetzt: mit Rücksicht auf die durch (40) bedingten Differentiationen empfiehlt es sich, die bezüglichen Binomialkoeffizienten als Nenner aufzunehmen:

$$\begin{aligned} Z_{2n+1} &= a_0 + \frac{a_1}{2!} x^2 + \frac{a_2}{4!} x^4 + \ldots \\ &\quad + \frac{a_{n-1}}{\{2(n-1)\}!} x^{2(n-1)} + \frac{a_n}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned} \tag{41}$$

Um zuvörderst $a_0 = Z_{2n+1}(0)$ zu bestimmen, multipliziere man die nach der Regel (38) gebildeten n Gleichungen:

$$\begin{aligned} Z_{2n+1}(0) &= -2n(2n-1) Z_{2n-1}(0), \\ Z_{2n-1}(0) &= -(2n-2)(2n-3) Z_{2n-3}(0), \ldots \\ Z_3(0) &= -2 \cdot 1 \, Z_1(0) = -2 \cdot 1, \end{aligned}$$

so hat man:

42) $$Z_{2n+1}(0) = a_0 = (-1)^n (2n)!.$$

Der nächste Koeffizient a_1 in (41) ist gleich Z''_{2n+1}
Die zweimalige Anwendung von (40) liefert:

$$Z''_{2n+1} = (2n+1)(2n)^2(2n-1)Z_{2n-1},$$

somit gemäss (42):

$$\begin{aligned} Z''_{2n+1}(0) = a_1 &= (2n+1)(2n)^2(2n-1)Z_{2n-1}(0) \\ &= (-1)^{n-1}(2n+1)(2n)^2(2n-1)\{2(n-1 \\ &= (-1)^{n-1}(2n+1)2n(2n)!. \end{aligned} \tag{42a}$$

Entsprechend kommt nach $2i$-maliger Differentiat von Z_{2n+1} und Nullsetzen des Argumentes x:

$$\begin{aligned} a_i = Z^{(2i)}_{2n+1}(0) &= (-1)^{n-i}(2n+1)(2n)^2(2n-1)^2 \ldots \\ &\quad (2n-2i+2)^2(2n-2i+1)(2n-2 \\ &= (-1)^{n-i}(2n+1)2n(2n-1)\ldots \\ &\quad (2n-2i+2)(2n)!. \end{aligned} \tag{43}$$

Auf Grund von (41), (43) ist das allgemeine Gesetz Z_{2n+1} (34) ermittelt:

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{Z_{2n+1}(x)}{(2n)!} = S_{2n+1}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!}(2n+1)2n \\ &\quad + \frac{x^4}{4!}(2n+1)2n \cdot (2n-1)(2n-2) - \\ &\quad + \frac{(-1)^n(2n+1)!}{(2n)!}x^{2n} \\ &= 1 - x^2(2n+1)_2 + x^4(2n+1)_4 - \ldots \\ &\quad + (-1)^n x^{2n} \cdot (2n+1 \end{aligned} \tag{44}$$

d. h. die rechte Seite, die zur Abkürzung mit $S_{2n+1}(x)$ zeichnet ist, ist eine ganze Funktion n^{ten} Grades von deren Koeffizienten die mit abwechselndem Vorzeichen nommenen geraden Binomialkoeffizienten von $(2n+1)$ s

Von (44) aus gelangt man durch einmaliges Diffe zieren unter Berücksichtigung von (40) zu der analc Darstellung von Z_{2n}:

$$(44a)\quad (-1)^n \frac{Z_{2n}(x)}{(2n-1)!} = S_{2n}(x) = x(2n)_1 - x^3(2n)_3 + x^5(2n)_5 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-1}(2n)_{2n-1}.$$

Wegen der ursprünglichen Bedeutung der Z (34) ist demnach der Satz bewiesen:

(45) „Die ν^{te} Ableitung D_ν von arctg$x$ ist gleich $Z_\nu(1+x^2)^{-\nu}$, wo Z_ν, je nachdem n ungerade oder gerade ist, aus (44) resp. (44a) zu entnehmen ist."

Hieraus fliesst sofort, da offenbar D_ν für jeden Wert des Argumentes eine stetige Funktion ist, nach § 19 (II) die Maclaurinsche Entwickelung für arctg$x$:

$$(VI)\quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n R_{2n+1},$$

wo das Lagrangesche Restglied R_{2n+1}:

$$(46)\quad R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{Z_{2n+1}(\vartheta x)}{\{1+(\vartheta x)^2\}^{2n+1}} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{\{1+(\vartheta x)^2\}^{2n+1}}[1 - (\vartheta x^2)(2n+1)_2 + (\vartheta x)^4(2n+1)_4 - \ldots + (-1)^n(\vartheta x)^{2n}(2n+1)_{2n}]$$

hinsichtlich seiner Konvergenz zu untersuchen ist.

Da arctg$(-x) = -$arctg$x$, darf man sich auf positive x beschränken. Man wird versuchen, die rechts von (46) auftretende Klammergrösse [ ] mit dem Nenner, also mit einer Potenz von $1+(\vartheta x)^2$ zu vergleichen. Da es nur auf den absoluten Wert von R_{2n+1} ankommt, und der absolute Wert einer Grösse nichts anderes ist, als die positive Quadratwurzel aus dem Quadrat der Grösse, so wird man leichter mit dem Quadrat der Klammergrösse [ ] operieren; überdies wird man ebenso die, die Ergänzung von [ ] bildende, für den Index $2n+1$ aufgestellte rechte Seite von (44a) berücksichtigen.

Es liegt also nahe, die zunächst für einen beliebigen Wert x des Argumentes und für ein ungerades $\nu = 2n+1$ konstruierte Quadratsumme Q:

$$(47)\quad \begin{aligned} Q = {} & (1 - x^2\nu_2 + x^4\nu_4 - x^6\nu_6 + \ldots \pm x^{\nu-1}\nu_{\nu-1})^2 \\ & + (x - x^3\nu_3 + x^5\nu_5 - x^7\nu_7 + \ldots \pm x^\nu\nu_\nu)^2 \end{aligned}$$

zu einer Potenz von $(1+x^2)$ in Beziehung zu setzen.

Die Ausführung von Q nach Potenzen von x^2 liefert, wenn man noch der Gleichmässigkeit halber das Zeichen $\nu_0 = 1$ einführt:

$$(48)\quad \begin{aligned} Q = {} & 1 + x^2(\nu_1^2 - 2\nu_0\nu_2) + x^4(\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_3 + 2\nu_0\nu_4) \\ & + x^6(\nu_3^2 - 2\nu_2\nu_4 + 2\nu_1\nu_5 - 2\nu_0\nu_6) \\ & + \ldots + x^{2i}(\nu_i^2 - 2\nu_{i-1}\nu_{i+1} + 2\nu_{i-2}\nu_{i+2} \\ & \qquad - 2\nu_{i-3}\nu_{i+3} + \ldots) + \ldots + x^{2\nu}\nu_\nu^2, \end{aligned}$$

wo die nach einem leicht ersichtlichen Gesetze gebildeten Klammergrössen jeweils so weit fortzusetzen sind, bis sie von selbst abbrechen.

Nun erhält man dieselbe Entwickelung, nur mit abwechselnden Vorzeichen der Potenzen von x^2, auf Grund des binomischen Satzes (§ 6) durch Ausführung des Produktes: $(1+x)^\nu(1-x)^\nu = (1-x^2)^\nu$:

$$(49)\quad \begin{aligned} (1+x)^\nu(1-x)^\nu &= (1-x^2)^\nu \\ &= (\nu_0 + x\nu_1 + x^2\nu_2 + x^3\nu_3 + \ldots + x^\nu\nu_\nu) \\ &\qquad \times (\nu_0 - x_1\nu_1 + x^2\nu_2 - x^3\nu_3 + \ldots + (-1)^\nu x^\nu\nu_\nu) \\ &= 1 - x^2(\nu_1^2 - 2\nu_0\nu_2) + x^4(\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_3 + 2\nu_0\nu_4) - \ldots \\ &\quad + (-1)^i x^{2i}(\nu_i^2 - 2\nu_{i-1}\nu_{i+1} + 2\nu_{i-2}\nu_{i+2} - + \ldots) \\ &\qquad + \ldots + (-1)^\nu x^{2\nu}\nu_\nu^2. \end{aligned}$$

Entwickelt man andererseits $(1-x^2)^\nu$ direkt nach dem binomischen Satze, so erkennt man, dass der Koeffizient von $(-1)^i x^{2i}$ in (49) mit ν_i d. i. dem i^{ten} Binomialkoeffizienten von ν übereinstimmt:

$$(50)\quad \nu_i = \nu_i^2 - 2\nu_{i-1}\nu_{i+1} + 2\nu_{i-2}\nu_{i+2} - \ldots$$

Damit ist bewiesen, dass die in (47), (48) angesetzte Quadratsumme Q nichts anderes ist als $(1+x^2)^\nu$:

$$Q = (1+x^2)^\nu. \tag{47a}$$

Hieraus folgen unmittelbar die beiden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} &|1 - x^2(2n+1)_2 + x^4(2n+1)_4 - x^6(2n+1)_6 + - \dots \\ &\qquad + (-1)^n x^{2n}(2n+1)_{2n}| \leqq (1+x^2)^{\frac{2n+1}{2}}, \\ &|x(2n+1)_1 - x^3(2n+1)_3 + x^5(2n+1)_5 - + \dots \\ &\qquad + (-1)^n x^{2n+1}(2n+1)_{2n}| \leqq (1+x^2)^{\frac{2n+1}{2}}. \end{aligned} \tag{51}$$

Da die Entwickelung (49) gilt, ob ν ungerade oder gerade ist, so bleibt die zweite der Ungleichungen (51) richtig, wenn man hierin $2n+1$ durch $2n$ ersetzt, wodurch der von den senkrechten Strichen eingefasste Ausdruck in die rechte Seite von (44a) übergeht.

Bedient man sich demnach der Bezeichnungen S_{2n+1}, S_{2n} in (44), (44a), so gehen die Ungleichungen (51) für jeden Wert von x über in:

$$|S_{2n+1}(x)| \leqq (1+x^2)^{\frac{2n+1}{2}}, \quad |S_{2n}(x)| \leqq (1+x^2)^n. \tag{51a}$$

Substituiert man in der ersten (oder auch in der zweiten) Ungleichung (51a) für x den Wert ϑx, so erledigt sich ohne weiteres die Diskussion des Restgliedes R_{2n+1} (46) der arctg-Reihe (VI):

$$\begin{aligned} |R_{2n+1}| &\leqq \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1} \cdot \frac{\{1+(\vartheta x)^2\}^{\frac{2n+1}{2}}}{\{1+(\vartheta x)^2\}^{2n+1}} \\ &\leqq \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1} \frac{1}{\{1+(\vartheta x)^2\}^{\frac{2n+1}{2}}}. \end{aligned} \tag{52}$$

Solange demnach $x \leqq 1$, oder, wenn man jetzt hinterher wieder negative Werte von x zulässt, solange $|x| \leqq 1$, sinkt $|R_{2n+1}|$ bei beliebig wachsendem n unter jede Grenze.

Dass umgekehrt für $|x| > 1$ $|R_{2n+1}|$ über jede Grenze hinauswächst, erhellt aus einer Bemerkung, die überhaupt bei derartigen Fragen am Platze ist (s. S. 271); da:

$$R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - R_{2n+3}, \quad \text{und da} \quad \left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|$$

bei wachsendem n unendlich gross wird, so würde die Annahme, dass R_{2n+1} nicht ebenfalls unendlich gross würde, auf einen Widerspruch stossen.

Die alternierende Reihe (VI) für arctg x hat daher für $|x| \leqq 1$ gemäss (52) dasselbe Fehlergesetz, wie eine alternierende Entwickelung überhaupt, deren Glieder (absolut genommen) successive und gegen Null abnehmen.

Für $x = 1$ wird $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$, somit geht aus (VI) im Besonderen für $\frac{\pi}{4}$ die „Leibnizsche Reihe" hervor:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

(53)

$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + (-1)^n R_{2n+1}, \quad R_{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

Diese Reihe für $\frac{\pi}{4}$ konvergiert offenbar, wie die analoge für $l(1+x)$ (IV), nur sehr langsam. Ähnlich wie dort lassen sich aber schneller konvergierende Reihen daraus herleiten, wenn man bedenkt, dass sich jeder Arctg als Summe von zwei anderen Arctg darstellen lässt, deren einer noch beliebig gewählt werden kann. Da nämlich nach dem Additionstheorem der Trigonometrie für tg (s. diese Sammlung Bd. III, § 44) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$, so gilt umgekehrt, wenn man $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = x_1$ setzt:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x_1 = \operatorname{arctg}\frac{x + x_1}{1 - x x_1}.$$

Nimmt man jetzt im Besonderen $\frac{x + x_1}{1 - x x_1} = 1$, oder was dasselbe ist, $x_1 = \frac{1-x}{1+x}$, so hat man:

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}.$$

Wählt man hier x irgendwie zwischen 0 und 1, so kann man auf arctg x und arctg $\frac{1-x}{1+x}$ die Entwickelung (VI) anwenden. Am einfachsten wird man $x=\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{3}$ setzen, dann gelangt man zu der folgenden Entwickelung für π:*)

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}\right)+-\ldots \tag{53a}$$

Bricht man hinter dem Gliede mit dem Nenner $2n-1$ ab, so resultiert ein zu grosser resp. zu kleiner Wert für $\frac{\pi}{4}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist; der absolute Wert des begangenen Fehlers ist dann

$$<\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{3^{2n+1}}\right).$$

Die Ausrechnung praktischer Beispiele sei dem Leser überlassen.

Auf Grund von (33), (44), (44a) lässt sich auch, da arctg x nebst allen Ableitungen für jeden Wert von x stetig ist, die Taylorsche Entwickelung für arctg $(x+h)$ hinschreiben:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}(x+h)=\operatorname{arctg}x+h\cdot\frac{1}{1+x^2}-h^2x(1+x^2)^{-2}\\ -\frac{h^3}{3}(1-3x^2)(1+x^2)^{-3}\\ +h^4x(1-x^2)(1+x^2)^{-4}+\ldots+(-1)^n\frac{h^{2n}}{2n}S_{2n}(x)\\ +(-1)^n\frac{h^{2n+1}}{2n+1}S_{2n+1}(x)+\ldots\end{aligned} \tag{VIa}$$

---

*) Nimmt man $x=\frac{1-x}{1+x}$, also $x=\sqrt{2}-1$, so ergiebt sich für $\frac{\pi}{8}$ die Entwickelung:

$$\frac{\pi}{8}=(\sqrt{2}-1)-\frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3}+\frac{(\sqrt{2}-1)^5}{5}-\frac{(\sqrt{2}-1)^7}{7}\pm\ldots$$

Bricht man hinter der $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Potenz von h ab, so ergiebt sich für das Restglied R_ν, wenn man in (51a) für x gemäss § 19 (Ia) den Wert $x+\vartheta h$ substituiert:

$$|R_\nu| \leqq \frac{|h|^\nu}{\nu}\left\{\frac{1}{1+(x+\vartheta h^2)}\right\}^{\frac{\nu}{2}}$$

oder auch:

$$\leqq \frac{1}{\nu}\left\{\frac{h^2}{1+(x+\vartheta h)^2}\right\}^{\frac{\nu}{2}} \tag{54}$$

oder auch:

$$\leqq \frac{1}{\nu}\left\{\frac{1}{\frac{1}{h^2}+\left(\frac{x}{h}+\vartheta\right)^2}\right\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Jedenfalls konvergiert also $|R_\nu|$ für wachsendes ν, welchen Wert x auch habe, gegen Null, sobald $|h| \leqq 1$.

Sei jetzt $|h| > 1$. Sind erstens x und h von gleichem Vorzeichen, so wird um so mehr $|R_\nu| \leqq \frac{1}{\nu}\left(\frac{h^2}{1+x^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}$, konvergiert also gegen Null, wenn $h^2 \leqq 1+x^2$, somit auch für alle Werte von h, für die $|h|$ die positive Quadratwurzel aus $1+x^2$ nicht überschreitet. Sind dagegen x und h von ungleichem Vorzeichen, und seien mit x_1, h_1 die absoluten Werte von x, h bezeichnet, so wird mit Rücksicht auf (54):

$$|R_\nu| \leqq \frac{1}{\nu}\left\{\frac{1}{\frac{1}{h_1^2}+\left(\frac{x_1}{h_1}-\vartheta\right)^2}\right\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Man hat offenbar zwei Unterfälle zu unterscheiden, nachdem $\frac{x_1}{h_1} \leqq 1$ und $\frac{x_1}{h_1} > 1$ ist.

Wenn $\frac{x_1}{h_1} \leqq 1$, so bleibt die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass der unbekannte Wert ϑ, von dem man nur weiss, dass er sich zwischen 0 und 1 befindet, gerade

gleich $\frac{x_1}{h_1}$ ist, oder, wenn speziell $\frac{x_1}{h_1}=1$, ϑ beliebig nahe bei 1 liegt. Somit lässt sich in diesem Falle, sobald $h_1>1$, kein sicherer Schluss mehr ziehen, dass $\frac{h^2}{1+(x+\vartheta h)^2}\leqq 1$ sei.

Ist dagegen $\frac{x_1}{h_1}>1$, oder was dasselbe besagt, sind x und $x+h$ von gleichem Vorzeichen, so nimmt die Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ ersichtlich, während die Variable z von x bis $x+h$ geht, nur zu. Demnach ist $\frac{1}{h_1^2}+\left(\frac{x_1}{h_1}-\vartheta\right)^2$ sicher dann nicht kleiner als 1, wenn das nämliche von $\frac{1}{h_1^2}+\left(\frac{x_1}{h_1}-1\right)^2$ gilt, d. h. wenn $x_1^2-2x_1h_1+1\geqq 0$, oder was dasselbe ist, wenn $h_1\leqq\frac{1+x_1^2}{2x_1}$.

Hier ist die Bedingung, dass $h_1>1$ sein soll, von selber erfüllt, sobald man von dem Spezialfalle $x_1=1$ absieht, denn man hat

$$\frac{1+x_1^2}{2x_1}=1+\frac{(1-x_1)^2}{2x_1}.$$

Also konvergiert dann $|R_n|$ auch für alle, die Einheit überschreitenden Werte von h_1, solange h_1 nicht grösser ist, als $1+\frac{(1-x_1)^2}{2x_1}$.

Damit ist das Ergebnis gewonnen:

„Der absolute Wert des Restgliedes in der Taylorschen Entwickelung (VIa) für arctg $(x+h)$ konvergiert bei beliebig wachsendem n stets gegen Null, solange $|h|\leqq 1$.

Diese Konvergenz findet bei gleichnamigen x, h auch noch statt, wenn $|h|$ grösser als 1, aber nicht grösser als $+\sqrt{1+x^2}$ ist, und bei ungleichnamigen x, h, aber gleichnamigen x, $x+h$, wenn $|h|$ grösser als 1, aber nicht

grösser als $1+\frac{(1-x_1)^2}{2x_1}$ ist, wo x_1 den absoluten Wert von x bezeichnet und der Spezialfall $x_1=1$ auszuschliessen ist."

Nunmehr erledigen wir noch die Untersuchung von $\arcsin x$, die manche Analogie mit $\operatorname{arctg} x$ aufweist.

Es bezeichne wiederum D_ν die ν^{te} Ableitung von:

7. $y=\arcsin x$.

Man erhält durch direktes Ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},\\
D_2 &= x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},\\
D_3 &= (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}},\\
D_4 &= (9x+6x^3)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}},\\
D_5 &= (9+72x^2+24x^4)(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Ganz wie bei $\operatorname{arctg} x$ zeigt man, dass D_ν das Produkt von $(1-x^2)^{-\frac{2\nu-1}{2}}$ in eine ganze Funktion $Z_\nu(x)$ $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, die bei geradem $\nu=2n$ das Produkt aus x und einer ganzen Funktion $\psi_n(x^2)$ von x^2 ist, bei ungeradem $\nu=2n+1$ selbst eine ganze Funktion $\varphi_n(x^2)$ von x^2:

$$
\left\{
\begin{aligned}
D_{2n+1} &= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{4n+1}{2}}} Z_{2n+1}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{4n+1}{2}}} \varphi_n(x^2),\\
D_{2n} &= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{4n-1}{2}}} Z_{2n}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{4n-1}{2}}} x\psi_n(x^2).
\end{aligned}
\right.
\tag{56}
$$

Um die Zähler Z in (56) zu ermitteln, versuche man, analog wie bei $\operatorname{arctg} x$, zunächst eine Rekursionsformel zwischen mehreren konsekutiven D abzuleiten.

Aus $D_1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, oder, was dasselbe ist, aus $D_1^2(1-x^2)=1$ folgt durch wiederholte Differentiation:

$$(57)\quad \begin{cases} -D_1 x + D_2(1-x^2) = 0, \\ -1D_1 - 3D_2 x + D_3(1-x^2) = 0, \\ -4D_2 - 5D_3 x + D_4(1-x^2) = 0, \\ -9D_3 - 7D_4 x + D_5(1-x^2) = 0, \ldots \end{cases}$$

Durch unvollständige Induktion gelangt man so zu der Rekursionsformel:

$$(58)\quad -n^2 D_n - (2n+1)D_{n+1}x + D_{n+2}(1-x^2) = 0.$$

Um sie allgemein zu beweisen, nehme man ihre Gültigkeit bis zu einem gewissen n an, dann ergiebt eine nochmalige Differentiation:

$$(59)\quad \begin{aligned} &-n^2 D_{n+1} - (2n+1)D_{n+1} - (2n+1)D_{n+2}x \\ &\qquad - 2D_{n+2}x + D_{n+3}(1-x^2) = 0, \end{aligned}$$

oder, durch Zusammenfassung:

$$(59a)\quad \begin{aligned} &-(n+1)^2 D_{n+1} - (2n+3)xD_{n+2} \\ &\qquad + D_{n+3}(1-x^2) = 0, \end{aligned}$$

d. i. aber die Formel (58) für den Index $n+1$ statt n.

Führt man jetzt in die Rekursionsformel (58) den Ansatz (56): $D_\nu = Z_\nu (1-x^2)^{-\frac{2\nu-1}{2}}$ ein, so erhält man die entsprechende Rekursionsformel für die Z:

$$(60)\quad n^2(1-x^2)Z_n + (2n+1)xZ_{n+1} = Z_{n+2},$$

also speziell für $x = 0$:

$$(61)\quad Z_{n+2}(0) = n^2 Z_n(0).$$

Andererseits liefert einmalige Differentiation von:

$$D_{n+1} = Z_{n+1}(1-x^2)^{-\frac{2n+1}{2}}:$$

$$(62)\quad \begin{aligned} D_{n+2} &= Z_{n+2}(1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}} \\ &= \{Z_{n+1}(2n+1)x + (1-x^2)Z'_{n+1}\}(1-x^2)^{-\frac{2n+3}{2}} \end{aligned}$$

somit:

$$(63) \qquad (1 - x^2)Z'_{n+1} + (2n+1)xZ_{n+1} = Z_{n+2}.$$

Subtrahiert man (63) von (60), so kommt als Rekursionsformel zwischen Z_{n+1} und Z_n:

$$(64) \qquad Z'_{n+1} = n^2 Z_n,$$

also wiederum speziell für $x = 0$:

$$(64a) \qquad Z'_{n+1}(0) = n^2 Z_n(0).$$

Auf Grund der Formeln (61), (64), (64a) und des Ansatzes (56) lässt sich der explizite Ausdruck für die ganze Funktion $Z_{2n+1}(x) = \varphi_n(x^2)$ resp. $Z_{2n}(x) = x\psi_n(x^2)$ konstruieren.

Mit Rücksicht auf die zur Ermittelung der Koeffizienten gemäss (64a) erforderlichen Differentiationen stelle man $Z_{2n+1}(x)$ in der Gestalt auf:

$$(65) \qquad Z_{2n+1}(x) = a_0 + \frac{a_1}{2!}x^2 + \frac{a_2}{4!}x^4 + \ldots + \frac{a_i}{(2i)!}x^{2i} + \ldots + \frac{a_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Zunächst liefert die wiederholte Anwendung von (61) für das freie Glied $a_0 = Z_{2n+1}(0)$ von (65):

$$(66) \qquad a_0 = Z_{2n+1}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots (2n-1)^2.$$

Der nächstfolgende Koeffizient a_1 ist $Z''_{2n+1}(0)$. Nach (64) wird:

$$Z''_{2n+1} = (2n)^2 Z'_{2n} = (2n)^2(2n-1)^2 Z_{2n-1},$$

mithin nach (61):

$$(67) \qquad \begin{aligned} a_1 = Z''_{2n+1}(0) &= (2n)^2(2n-1)^2 Z_{2n-1}(0) \\ &= (2n)^2[1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots (2n-1)^2]. \end{aligned}$$

Analog resultiert für den Koeffizienten $a_i = Z^{(2i)}_{2n+1}(0)$ *in (65):*

$$(68)\quad a_i = (2n)^2(2n-2)^2\ldots[2n-2(i-1)]^2 \times 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2.$$

Demnach erhält man nach Division mit dem allen Koeffizienten a in (65) gemeinsamen Faktor $1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2$ für den Zähler $Z_{2n+1}(x)$ von D_{2n+1} (56):

$$\frac{Z_{2n+1}(x)}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2} = S_{2n+1}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!}(2n)^2 + \frac{x^4}{4!}(2n)^2(2n-2)^2 + \frac{x^6}{6!}(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2 + \ldots + \frac{x^{2i}}{(2i)!}(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots(2n-2i+2)^2 + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(2n)^2(2n-2)^2\ldots 2^2, \tag{69}$$

wo die ganze Funktion $2n^{\text{ten}}$ Grades in x rechterhand der Kürze halber mit $S_{2n+1}(x)$ bezeichnet ist.

Der entsprechende Ausdruck für $Z_{2n}(x)$, den Zähler von D_{2n} (56) geht aus (69) durch einmalige Differentiation mit Berücksichtigung von (64) hervor:

$$\frac{Z_{2n}(x)}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2} = S_{2n}(x) = x + \frac{x^3}{3!}(2n-2)^2 + \frac{x^5}{5!}(2n-2)^2(2n-4)^2 + \ldots + \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots(2n-2i)^2 + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots 2^2, \tag{69a}$$

wo die *rechts stehende* ganze Funktion $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades *in x mit $S_{2n}(x)$ bezeichnet* ist.

Damit ist das Ergebnis abgeleitet:

„Die ν^{te} Ableitung von arcsin x ist ein Bruch, dessen Nenner die (positive) $\frac{(2\nu-1)^{te}}{2}$ Potenz von $(1-x^2)$ ist, während der Zähler $Z_\nu(x)$, jenachdem ν ungerade oder gerade ist, durch (69) resp. (69a) dargestellt wird."

Da demnach die ν^{te} Ableitung von arcsin x, wie auch arcsin x selbst, für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als die Einheit ist, stetig ist, ist die Voraussetzung der Entwickelbarkeit von arcsin x in die Maclaurinsche Reihe § 19, (II)) erfüllt und man hat auf Grund von (69), (69a):

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}3^2 + \frac{x^7}{7!}3^2\cdot 5^2 + \frac{x^9}{9!}3^2\cdot 5^2\cdot 7^2 + \ldots$$

$$+ \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot \ldots (2n-3)^2 + R_{2n+1}$$

(VII)
$$= x + \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{x^7}{7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$$

$$+ \frac{x^{2i+1}}{2i+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots : (2i-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \quad 2i} + \ldots$$

$$+ \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots (2n-2)} + R_{2n+1},$$

wo das Restglied nach § 19 (II) resp. (IIa) zu untersuchen ist.

Zu dem Behuf wird man, ähnlich wie bei arctg x, die rechte Seite von (69), $S_{2n+1}(x)$, mit dem Nenner $(1-x^2)^{\frac{4n+1}{2}}$ von D_{2n+1} (56) vergleichen; da aber $1-x^2=(1-x)(1+x)$, und in (69) nur positive Glieder auftreten, wird man vielmehr $S_{2n+1}(x)$ mit einer Potenz von $(1+x)$ vergleichen. Denn da $\arcsin(-x) = \arcsin x$, so darf man sich von vornherein auf positive x beschränken.

Nun bestehen für die Koeffizienten der einzelnen

Potenzen von x^2 in $S_{2n+1}(x)$ (69) offenbar die Ungleichheiten:

$$
\begin{aligned}
&(2n)^2 < (2n+1)2n,\\
&(2n)^2(2n-2)^2 < (2n+1)2n(2n-1)(2n-2),\\
&(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\\
&\quad < (2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4),\ldots,\\
&(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\ldots(2n-2i)^2\\
&\quad < (2n+1)2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2i+1)(2n-2i).
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Hieraus fliesst für $Z_{2n+1}(x)$ die Ungleichheit:

$$
\begin{aligned}
\frac{Z_{2n+1}(x)}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2} = S_{2n+1}(x) < 1 + x^2(2n+1)_2\\
+ x^4(2n+1)_4 + \ldots + x^{2n}(2n+1)_{2n},
\end{aligned}
\tag{71}
$$

also a fortiori, wenn x einen beliebigen positiven Wert bedeutet:

$$
\begin{aligned}
S_{2n+1}(x) < 1 + x(2n+1)_1 + x^2(2n+1)_2 + x^3(2n+1)_3\\
+ \ldots + x^{2n}(2n+1)_{2n} + x^{2n+1}
\end{aligned}
\tag{72}
$$

i. e. $< (1+x)^{2n+1}$.

Wendet man (72) unter Berücksichtigung von (56) auf das Restglied R_{2n+1} von (VII) in der Lagrangeschen Form (§ 19, (II)) an:

$$
R_{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\frac{Z_{2n+1}(\vartheta x)}{\{1-(\vartheta x)^2\}^{\frac{4n+1}{2}}} \qquad (0<\vartheta<1),
$$

so wird:

$$
\begin{aligned}
{}_{+1} &< \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\quad 2n}\,\frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1}\left\{\frac{(1+\vartheta x)}{1-(\vartheta x)^2}\right\}^{\frac{4n+1}{2}}(1+\vartheta x)^{\frac{1}{2}}\\
{}_{)} &< \frac{1}{2n+1}\,x^{\frac{1}{2}}(1+\vartheta x)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x}{1-\vartheta x}\right)^{\frac{4n+1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Das lehrt, ähnlich wie beim Logarithmus und der
tenz, dass zwar für ein positives $x < \frac{1}{2}$ der Bruch

$$\frac{x}{1-\vartheta x} = \frac{1}{\frac{1}{x}-\vartheta}$$

sicher < 1, für $x = \frac{1}{2}$ sicher $\leqq 1$, also $\lim R_{2n+1} = 0$,
dagegen für ein x zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 dieser Schluss ver

Indem man daher wiederum die Cauchysche Form
Restgliedes (§ 19, (IIa)) zu Hilfe nimmt findet man:

$$R_{2n+1} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\, x^{2n+1}(1-\vartheta)^{2n}\left\{\frac{1}{1-(\vartheta x)^2}\right\}^{\frac{4n+1}{2}} (1\cdot$$

(74)
$$< \frac{x(1+\vartheta x)}{\sqrt{1-(\vartheta x)^2}}\left\{\frac{1-\vartheta}{\frac{1}{x}-\vartheta}\right\}^{2n}.$$

Ist jetzt x positiv und < 1, also, wenn ε irgend
beliebig, aber fest unterhalb der Einheit gewählte pos
Grösse bedeutet, $0 \leqq x \leqq \varepsilon$, so sind, da $1 + \vartheta x$
$1 - (\vartheta x)^2 \geqq 1 - \varepsilon^2$, $\frac{1-\vartheta}{\frac{1}{\varepsilon}-\vartheta} \leqq \varepsilon$, um so mehr:

(75)
$$R_{2n+1} < \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\varepsilon^{2n},$$

also $\lim R_{2n+1} = 0$.

Diese Fehlerregel lässt sich wiederum bei Ber
sichtigung der weiter folgenden Glieder vereinfachen.
für $\lim p = \infty$ $\lim R_{2(n+p)+1} = 0$, so wird

$$R_{2n+1} < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}(1 + x^2 + x^4 + \ldots) < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1-x}$$

also für $x \leqq \varepsilon$:

(75a)
$$R_{2n+1} < \frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2}.$$

Berücksichtigt man hinterher auch negative x, so gilt demnach:

„Das Restglied der Maclaurinschen Entwickelung (VII) für arcsin x konvergiert bei wachsendem n gegen Null, so lange sich der absolute Wert von x unterhalb der Einheit befindet, d. h. also, so lange überhaupt die Vorbedingungen für die Entwickelbarkeit von arcsin x erfüllt sind."

Setzt man im besonderen in (VII) für x den Wert $\frac{1}{2}$, so wird, da (siehe diese Sammlung Bd. III, § 11) $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, und es entsteht für $\frac{\pi}{6}$ die Entwickelung:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5\cdot 2^5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1}{7\cdot 2^7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots \tag{76}$$
$$+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n-2}+R_{2n+1},$$

wo R_{2n+1} gemäss (75a) (d. h. für $\varepsilon=\frac{1}{2}$)

$$<\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\frac{4}{3} \text{ d. i. } <\frac{1}{3(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Die Ausrechnung numerischer Beispiele sei dem Leser überlassen.

Mit Hilfe von (69), (69a) und (74) lässt sich auch sofort die Taylorsche Reihe für arcsin $(x+h)$ aufstellen und deren Restglied diskutieren. Offenbar müssen die beiden Argumente x und $x+h$ innerhalb des Intervalles $(-1\ldots+1)$ – mit Ausschluss der Endwerte — liegen. Nach § 19(I) kommt:

$$\arcsin(x+h)=\arcsin x+hS_1(x)+\frac{h^2}{2}S_2(x)+\frac{h^3}{3}\frac{1}{2}S_3(x)$$
$$+\frac{h^4}{4}\cdot\frac{1\cdot 3}{2}S_4(x)+\frac{h^5}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}S_5(x) \tag{VIIa}$$
$$+\frac{h^6}{6}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4}S_6(x)+\cdot\cdot$$

Bricht man hinter der $(2n)^{\text{ten}}$ Potenz von h ab, so wird das Restglied R_{2n+1}:

$$R_{2n+1} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} h^{2n+1}(1-\vartheta)^{2n}\left\{\frac{1}{1-(x+\vartheta h)^2}\right\}^{\frac{4n+1}{2}}\{1+(x+\vartheta h)$$

(77)
$$< \frac{h\{1+(x+\vartheta h)\}}{\sqrt{1-(x+\vartheta h)^2}}\left\{\frac{1-\vartheta}{\frac{1-x}{h}-\vartheta}\right\}^{2n}.$$

Da $1-x$ stets positiv ist, so muss, wenn wieder $|h|$ mit h_1 bezeichnet wird, falls R_{2n+1} gegen Null konvergieren soll, $\frac{1-x}{h_1} > 1$ i. e. $x + h_1 < 1$ sein.

Zu demselben Ergebnis würde man gelangen beim Abbrechen hinter der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Potenz von h. Denn man beweist ganz wie bei der Herleitung der Ungleichung (72), dass für irgend ein positives x:

$$(72a)\quad S_{2n}(x) = \frac{Z_{2n}(x)}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2} < x(1+x)^{2n-1}.$$

Auf die den Reihen (I), (II), (VI), (VII) für $\sin x$ $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ parallel laufenden Entwickelunge für die sogenannten „hyperbolischen Funktionen und dere Umkehrungen" soll in der Integralrechnung bei Gelegenhei der zugehörigen Integrale eingegangen werden.

§ 21. Die Taylorsche und Maclaurinsche Reihenentwickelung für Funktionen mehrerer Variabeln.

Die in § 19 dargelegte Methode, eine Funktion $f(x+$ resp. $f(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von h resp. x zu en wickeln, lässt sich auf Funktionen mehrerer Variabeln au dehnen.

Es wird im wesentlichen genügen, Funktionen $f(x,$ zweier Variabeln x, y in Betracht zu ziehen; den letztere mögen die Inkremente h, k erteilt werden.

Behufs Entwickelung von $f(x+h, y+k)$ nach Potenze von h, k liegt es nahe, das in § 7 für ganze Funktion $f(x, y)$ eingeschlagene Verfahren, das zur binomischen En wickelung (II) (S. 71) derselben führte, zu befolgen.

Man wird demnach zuerst $f(x+h,\ y+k)$ — als Funktion von $x+h$ allein betrachtet — gemäss § 19 (Ia) (S. 254) nach Potenzen von h entwickeln, sodann die als Faktoren der Potenzen von h auftretenden, bezüglich x genommenen partiellen Ableitungen (s. S. 159) von f — als Funktionen von $y+k$ allein aufgefasst — ihrerseits, wiederum gemäss § 19 (Ia), nach Potenzen von k, und schliesslich die jeweils zu irgend einem Potenzprodukt $h^\varrho k^\sigma$ $\left(\begin{smallmatrix}\varrho=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\\ \sigma=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\end{smallmatrix}\right)$ gehörigen Koeffizienten vereinigen.

Ebensogut könnte man aber auch den angegebenen Prozess derart umkehren, dass erst nach Potenzen von k entwickelt wird, und dann die auftretenden Faktoren nach Potenzen von h.

Als erste Frage wird sich erheben, ob diese beiden Prozesse nicht zu Entwickelungen führen, die, abgesehen von den bezüglichen Restgliedern,*) voneinander verschieden ausfallen?

Die partiellen Ableitungen von $f(x,\ y)$ mögen der Kürze halber, wie in § 7, durch Indizes ausgedrückt werden, wobei vorderhand genau auf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsoperationen zu achten ist:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2;\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x}=f_{11},\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}=f_{12},\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}=f_{21},\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}=f_{22}; \\ \dfrac{\partial f_{11}}{\partial x}=f_{111},\ \dfrac{\partial f_{11}}{\partial y}=f_{112},\ \dfrac{\partial f_{12}}{\partial x}=f_{121},\ \dfrac{\partial f_{12}}{\partial y}=f_{122}, \\ \dfrac{\partial f_{21}}{\partial x}=f_{211},\ \dfrac{\partial f_{21}}{\partial y}=f_{212},\ \dfrac{\partial f_{22}}{\partial x}=f_{221},\ \dfrac{\partial f_{22}}{\partial y}=f_{222};\ \text{etc.}; \end{cases}$$

die nach erfolgter Differentiation einzusetzenden Argumente werden in Klammern hinzugefügt werden.

Dann liefert die Ausführung des erstgenannten Prozesses, wenn man sich zunächst mit den Gliedern bis zur zweiten Dimension inkl. in h, k begnügt, schrittweise:

---

*) Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf die Benutzung des Lagrangeschen Restgliedes (§ 19 (Ia)); die des Cauchyschen Restgliedes (§ 19 (Ia)′, S. 258) würde in analoger Weise vor sich gehen.

$$(2)\quad \begin{cases} f(x+h,\ y+k) = f(x,\ y+k) + hf_1(x,\ y+k) \\ \qquad\qquad + \dfrac{h^2}{2!} f_{11}(x,\ y+k) + \dots \\ f(x,\ y+k) = f(x,\ y) + kf_2(x,\ y) + \dfrac{k^2}{2!} f_{22}(x,\ y) + \dots \\ f_1(x,\ y+k) = f_1(x,\ y) + kf_{12}(x,\ y) + \dots \\ f_{11}(x,\ y+k) = f_{11}(x,\ y) + \dots \end{cases}$$

Somit ergiebt die Einsetzung der rechten Seiten von $f(x,\ y+k)$, $f_1(x,\ y+k)$, $f_{11}(x,\ y+k)$ in die rechte Seite von $f(x+h,\ y+k)$, wenn man noch die Glieder gleicher Dimension in h, k (s. S. 72) zusammenfasst:

$$(3)\quad \begin{aligned} f(x+h,\ y+k) &= f(x,\ y) + \{hf_1(x,\ y) + kf_2(x,\ y)\} \\ &+ \frac{1}{2!}\{h^2 f_{11}(x,\ y) + 2hkf_{12}(x,\ y) + k^2 f_{22}(x,\ y)\} + \dots \end{aligned}$$

Andererseits liefert in analoger Weise der zweite Prozess:

$$(4)\quad \begin{aligned} f(x+h,\ y+k) &= f(x,\ y) + \{hf_1(x,\ y) + kf_2(x,\ y)\} \\ &+ \frac{1}{2!}\{h^2 f_{11}(x,\ y) + 2hkf_{21}(x,\ y) + k^2 f_{22}(x,\ y)\} + \dots \end{aligned}$$

Die Vergleichung der rechten Seiten von (3), (4) lehrt, dass das Anfangsglied $f(x,\ y)$, wie die Glieder erster Dimension $hf_1(x,\ y) + kf_2(x,\ y)$, beidemal übereinstimmen, dass dagegen die Aggregate der Glieder zweiter Dimension insofern eine Verschiedenheit aufweisen, als das mittlere Glied in (3) den Wert $hkf_{12}(x,\ y)$, in (4) den Wert $hkf_{21}(x,\ y)$ besitzt.

Indessen lässt sich mit Rücksicht auf den Satz des § 7 (S. 70), wonach bei ganzen Funktionen $f_{12}(x,y) = f_{21}(x,y)$ war, erwarten, dass die fragliche Verschiedenheit nur eine formale, d. h. dass allgemein für Funktionen $f(x,\ y)$ zweier Variabeln $f_{12} = f_{21}$ sein wird.

In der That, denkt man sich die rechten Seiten von (3), (4) jeweils durch das — vermöge Zusammenfassung der einzelnen, in (2) resp. in den, beim zweiten Prozesse parallel

laufenden Entwickelungen auftretenden Lagrangeschen Restgliedern entstehende — Restglied dritter Dimension R_3 resp. P_3 abgeschlossen, so ergiebt sich durch Subtraktion die für alle Werte x, y, h, k innerhalb eines gewissen Intervalles (s. unten) gültige Identität:

$$(5) \qquad \{f_{12}(x, y) - f_{21}(x, y)\} + \frac{1}{hk}(R_3 - P_3) \equiv 0.$$

Nimmt man hier im besonderen etwa h gleich k, so wird das Glied $\frac{1}{hk}(R_3 - P_3)$ in (5) das Produkt aus h in einen für alle in Betracht kommenden Werte von x, y, h endlich bleibenden Faktor. Lässt man daher die Grösse h gegen Null konvergieren, so folgt aus (5):

$$(6) \qquad f_{12}(x, y) \equiv f_{21}(x, y).$$

Dies findet nach Massgabe der in § 19 für Funktionen einer Variabeln formulierten Entwickelbarkeitsbedingungen jedenfalls dann statt, wenn $f(x, y)$ nebst den partiellen Ableitungen bis zu den dritten inkl. in der „Umgebung" der „Stelle" (x, y) — d. h. für Werte der Variabeln, die von x, y beliebig wenig abweichen — eindeutig bestimmt und stetig sind.

Hierbei ist die in § 8 (S. 76) für ganze Funktionen $f(x, y)$ nachgewiesene „Stetigkeit" für beliebige Funktionen $f(x, y)$ als Definition festzusetzen:

> „Eine Funktion $f(x, y)$ zweier Variabeln heisst *stetig* an einer Stelle x, y, wenn sich die absoluten Werte zweier Inkremente ε, η stets so klein annehmen lassen, dass der absolute Wert der Differenz $f(x + \varepsilon, y + \eta) - f(x, y)$ unter eine beliebig klein vorgegebene positive Grösse heruntergedrückt werden kann."

Hieraus ist ohne weiteres zu entnehmen, was unter der Stetigkeit einer Funktion $f(x, y)$ in einem ganzen „Intervalle" $(x \ldots x + h;\ y \ldots y + k)$ zu verstehen ist, wie auch die Erweiterung des Stetigkeitsbegriffes auf Funktionen von mehr als zwei Variabeln.

Aus dem Satze (6) lässt sich weiterhin folgern, dass auch bei allen höheren partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ die Reihenfolge der Differentiationen gleichgültig ist.

Im nächst höheren Falle ergiebt die Ableitung der Identität (6) nach x resp. y: $f_{121} = f_{211}$, $f_{122} = f_{212}$, andererseits die Anwendung von (6) auf die Funktionen f_1 resp. f_2: $f_{112} = f_{121}$, $f_{212} = f_{221}$, somit auch:

$$f_{112} = f_{121} = f_{211}; \quad f_{122} = f_{212} = f_{221}. \tag{7}$$

Zum Zwecke des allgemeinen Beweises fasse man die Reihenfolge der Indizes 1, 2 bei irgend einer n^{ten} partiellen Ableitung von f als eine Permutation von n Elementen auf; da (s. diese Sammlung Bd. VI, § 40) alle Permutationen von n Elementen durch successive Vertauschung je zweier Elemente aus einer einzigen, ersten Permutation abgeleitet werden können, so erkennt man, auf Grund wiederholter Anwendung von (6), dass bei irgend einer partiellen Ableitung von $f(x, y)$ die Reihenfolge der Differentiationen auf das Resultat ohne Einfluss ist. Und da sich die nämliche Überlegung ohne weiteres auf Funktionen von mehr als zwei Variabeln übertragen lässt, so gilt allgemein:

> (I.) „Irgend eine n^{te} partielle Ableitung einer Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ von mehreren Variabeln $x, y, z, \ldots$ hat denselben Wert, in welcher Reihenfolge man auch die einzelnen Differentiationsprozesse ausführen möge. Hierbei wird vorausgesetzt, dass alle partiellen Ableitungen von f, bis zu den $(n+1)^{\text{ten}}$ inkl., an der Stelle $(x, y, z, \ldots)$ eindeutig bestimmt und stetig sind."

Man ist daher berechtigt, sich der kürzeren — von (1) abweichenden — Schreibweise zu bedienen:

$$\frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = f_{m,n}(x, y) = f_{m,n} \begin{cases} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$\frac{\partial^{m+n+p} f(x, y, z)}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p} = f_{m,n,p}(x, y, z) = f_{m,n,p} \begin{cases} m = 0, 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ p = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{8}$$

u. s. w.,

uszudrücken, dass $f(x, y)$ m-mal nach x, n-mal nach y enziert ist, entsprechend $f(x, y, z)$ m-mal nach x, l nach y, p-mal nach z u. s. w. Ist im besonderen d ein Index gleich Null, so besagt das, dass nach der lichen Variabeln überhaupt nicht differenziert ist. In- n pflegt man die ersten partiellen Ableitungen von $y, z)$ nach resp. $x, y, z, \ldots$ bequemer (wie in (1)) mit $f_3, \ldots$ zu bezeichnen.

Nunmehr kehren wir zu der Entwickelung (3) resp. (4) k.

Dann führt auf Grund von (I) und nach dem bilde der Entwickelung des § 7 (S. 71), die Ver- gung der Glieder gleicher Dimension in h, k zu Taylorschen Reihenentwickelung für Funktionen $y)$ zweier Variabeln:

$$f(x+h,\ y+k) = f + \{hf_1 + kf_2\}$$

$$+ \frac{1}{2!}(h^2 f_{2,0} + 2hkf_{1,1} + k^2 f_{0,2})$$

$$+ \frac{1}{3!}\{h^3 f_{3,0} + 3h^2 k f_{2,1} + 3hk^2 f_{1,2} + k^3 f_{0,3}\} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{i!}\{h^i f_{i,0} + i_1 h^{i-1} k f_{i-1,1} + i_2 h^{i-2} k^2 f_{i-2,2} + \ldots$$

$$+ i_1 hk^{i-1} f_{1,i-1} + k^i f_{0,i}\} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\{h^{n-1} f_{n-1,0} + (n-1)_1 h^{n-2} k f_{n-2,1}$$

$$+ (n-1)_2 h^{n-3} k^2 f_{n-3,2} + \ldots + k^{n-1} f_{0,n-1}\} + R_n,$$

wo rechterhand bei den partiellen Ableitungen von f die Eintragung der Variabelnwerte x, y der Kürze halber unterdrückt ist, wo unter i_r der r^{te} Binomialkoeffizient von i zu verstehen ist; endlich das Restglied R_n als durch Zusammenfassung der einzelnen Restglieder in (3) resp. (4) entstanden zu denken ist.

Hierbei wird gemäss § 19 (II) vorausgesetzt, dass die Funktion f nebst ihren

partiellen Ableitungen, bis zu den n^{ten} inkl., im ganzen Intervalle $(x \ldots x+h;\ y \ldots y+k)$ überall eindeutig bestimmt und stetig ist. Aus (II) geht die Maclaurinsche Entwickelung von $f(x, y)$ nach Potenzen von x, y hervor, wenn man rechterhand die Grössen h, k; x, y durch resp. x, y; 0, 0 ersetzt, vorausgesetzt, dass die angegebenen Entwickelbarkeitsbedingungen jetzt für das Intervall $(0 \ldots x;\ 0 \ldots y)$ erfüllt sind."

Das Lagrangesche Restglied R_n in (II) würde bei der bisher befolgten Methode in einer wenig übersichtlichen Form auftreten. Eine einfachere Gestalt des Restgliedes, und überdies eine zweite, durchsichtigere Herleitung von (II) lässt sich erzielen, wenn man eine Hilfsvariable t einführt, und damit direkt auf die Maclaurinsche Entwickelung (II) des § 19 zurückgreift. Man bilde zu dem Behuf die Funktion $\varphi(t)$ einer Variabeln t:

$$(9)\quad \varphi(t) = f(x+ht,\ y+kt) = f(u, v);\ u = x+ht,\ v = y+kt,$$

entwickele dieselbe — bei festgehalten gedachten $x, y; h, k$ — nach § 19 (II) nach Potenzen von t, und lege hinterher der Grösse t den speziellen Wert $t = 1$ bei.

Werden die totalen Differentiationen von φ nach t, wie früher, mit Accenten bezeichnet, so kommt zuvörderst:

$$(10)\quad \begin{aligned} \varphi(t) = f(x+ht, y+kt) &= f(x,y) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(0) + \cdots \\ &+ \frac{t^i}{i!}\varphi^{(i)}(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(\vartheta t), \\ & 0 < \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Die Ausführung der in Rede stehenden Differentiationen nach t — wenn man noch hinterher die Grösse t durch den Wert 0 resp. im Restgliede durch den Wert ϑt ersetzt — liefert mit Benutzung der Regel (IVa) des § 13 (S. 164), da hier im besonderen

$$(11)\quad u' = h,\quad v' = k$$

ausfällt:

$$
(12)\quad \begin{cases}
\varphi'(0) = h f_1 + k f_2, \\
\varphi''(0) = h^2 f_{2,0} + 2hk f_{1,1} + k^2 f_{0,2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varphi^{(i)}(0) = h^i f_{i,0} + i_1 h^{i-1} k f_{i-1,1} + i_2 h^{i-2} k^2 f_{i-2,2} + \dots \\
\qquad\qquad + i_1 h k^{i-1} f_{1,i-1} + k^i f_{0,i}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varphi^{(n)}(\vartheta t) = h^n f_{n,0}(x + h\vartheta t,\ y + k\vartheta t) \\
\qquad + n_1 h^{n-1} k f_{n-1,1}(x + h\vartheta t,\ y + k\vartheta t) + \dots \\
\qquad + n_1 h k^{n-1} f_{1,n-1}(x + h\vartheta t,\ y + k\vartheta t) \\
\qquad + k^n f_{0,n}(x + h\vartheta t,\ y + k\vartheta t),
\end{cases}
$$

wo wiederum in den ersten $n-1$ rechten Seiten bei den partiellen Ableitungen von f die Variabelnwerte x, y einzutragen sind.

Setzt man diese Werte (12) in (10) ein, und nimmt hinterher $t=1$, so resultiert abermals — unter den nämlichen Entwickelbarkeitsbedingungen wie dort — die Taylorsche Entwickelung (II), während das Lagrangesche Restglied R_n nunmehr die Gestalt gewinnt:

$$
(\text{IIa})\quad \begin{aligned}
R_n = \frac{1}{n!}\{ & h^n f_{n,0}(x + h\vartheta,\ y + k\vartheta) \\
& + n_1 h^{n-1} k f_{n-1,1}(x + h\vartheta,\ y + k\vartheta) \\
& + n_2 h^{n-2} k^2 f_{n-2,2}(x + h\vartheta,\ y + k\vartheta) + \dots \\
& + k^n f_{0,n}(x + h\vartheta,\ y + k\vartheta).
\end{aligned}
$$

Offenbar bietet es keine Schwierigkeit, und sei daher dem Leser überlassen, das soeben befolgte Verfahren und damit die Taylorsche (resp. Maclaurinsche) Reihenentwickelung auf Funktionen von mehr als zwei Variabeln zu übertragen. Man nennt das Aggregat der Glieder erster Dimension in (II):

$$
(13)\qquad h f_1(x,\ y) + k f_2(x,\ y),
$$

falls die absoluten Werte von h, k unter gewissen, beliebig klein anzunehmenden (positiven) Grenzen bleiben, das totale Differential*) der Funktion $f(x, y)$, und entsprechend für Funktionen von mehr als zwei Variabeln.

Von den Reihenentwickelungen (II, IIa) lassen sich analoge Anwendungen machen, wie in §§ 19, 20 von den entsprechenden Entwickelungen für Funktionen einer Variabeln.

Insbesondere lässt sich hierauf die Theorie der Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Variabeln gründen. Soll $f(x, y, \ldots)$ an der Stelle $(x, y, \ldots)$ einen extremen Wert besitzen, d. h. grösser resp. kleiner sein als alle Werte der Funktion innerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung von $(x, y, \ldots)$, so erweist sich, wie man unmittelbar aus (II), (IIa) herleitet, dazu als notwendig, dass alle ersten partiellen Ableitungen von f an der Stelle $(x, y, \ldots)$ verschwinden.

Die nähere Untersuchung, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein Maximum resp. ein Minimum von f sind, hängt von dem Verhalten der Aggregate zweiter, eventl. höherer Dimension in (II) ab, und soll ihrer Schwierigkeit halber hier nicht weiter verfolgt werden.

Kapitel III.

Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen und Produkte.

§ 22. Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

Die Taylorsche und Maclaurinsche Entwickelung (§§ 19, 20, 21) führten zu beliebig weit fortsetzbaren Darstellungsreihen für Funktionen. Diese Reihen hatten aber wesentlich den Charakter endlicher Reihen, d. h. brach man die Entwickelung an irgend einer Stelle ab, so wurde der Rest oder Fehler durch das (Lagrangesche oder Cauchysche) Restglied repräsentiert; je nachdem das letztere den Grenzwert resp. ∞ besass, war die Entwickelung selbst eine konvergente resp. divergente. Indessen zeigten verschiedene Fälle (§ 20, S. 266, 267, 271, 296), wie die Kenntnis des Restgliedes durch das Gesetz der unbegrenzt fortsetzbaren Reihe selbst entbehrlich wurde.

Analog traten in § 5, (S. 48); § 20, (S. 282 flg.) zwei Beispiele für beliebig fortsetzbare Produkte auf, deren Kon-

---

*) Die Wichtigkeit dieses Begriffes wird erst in der Integralrechnung hervortreten. Übrigens ist es für eine Reihe von Eigenschaften des totalen Differentiales gleichgültig, welche Werte die Grössen h, k besitzen.

vergenz (resp. Divergenz) aus der Natur des darzustellenden Ausdrucks $\left(\frac{\sin x}{x},\ m_n\right)$ erschliessbar war.

Der Fortschritt der Analysis erfordert aber, dass nicht nur mathematische Ausdrücke resp. Funktionen in Reihen entwickelt werden, sondern dass umgekehrt „unendliche" Reihen oder Produkte, d. s. solche, die nach irgend einem vorgegebenen Gesetz unbegrenzt fortsetzbar sind, bestimmte mathematische Ausdrücke resp. Funktionen definieren, und so im besonderen zur Aufstellung neuer Gebilde jener Art Veranlassung geben.*)

Obschon in unserer „Differential- und Integralrechnung" von der in Rede stehenden Umkehrung nur ein beschränkter Gebrauch gemacht werden soll, so wird es sich doch empfehlen, behufs Einführung in die gemeinte Theorie die einfachsten Regeln für die Konvergenz (resp. Divergenz) unendlicher Reihen und Produkte und für die dadurch gewonnenen Grenzwerte aufzustellen.

Unendliche Reihen mit positiven Gliedern.

Für die Theorie der unendlichen Reihen sind grundlegend die, die nur positive Glieder aufweisen.

Es sei ein, nach irgend einem vorgegebenen Gesetze beliebig fortsetzbarer Komplex positiver Grössen u vorgelegt:

(1) $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}, u_{n+p}, u_{n+p+1}, \ldots$.

Es wird gefragt, ob und wann mit der unendlichen Reihe

$$(2) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1} + u_{n+p} + u_{n+p+1} + \ldots$$

nach den für endliche Summen gültigen Gesetzen der Arithmetik gerechnet werden darf.

Die Summe der ersten n Glieder in (2) sei mit s_n bezeichnet:

$$(3) \qquad s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

die Summe der darauf folgenden p Glieder, d. i. $s_{n+p} - s_n$, mit $R_{n,p}$:

$$(4) \qquad R_{n,p} = s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}.$$

*) *Dies zeigt sich* insbesondere bei Einführung komplexer *Variabeln, worauf in der* Integralrechnung eingegangen werden wird.

(A.) „Dann heisst die Reihe der u (2) *konvergent*, wenn n stets so hoch gewählt werden kann, dass $R_{n,p}$ — gleichgültig, wie gross man p auch nehmen möge*) — unter eine vorgegebene, beliebig kleine (positive) Grösse η heruntergedrückt werden kann:

$$R_{n,p} < \eta; \tag{5}$$

andernfalls heisst die Reihe der u *divergent*."

Im Falle der Konvergenz sagt man, dass die Reihe der u einen bestimmten endlichen Grenzwert S („Summe") besitze, in Zeichen:

$$S = \lim_{n=\infty} s_n = \lim s_n . \tag{6}$$

Dass in der That mit derartigen Grenzwerten — die man sich, statt durch (2), auch durch die Anordnung der Summen $s_0 = u_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots$ repräsentiert denken mag — auch bei geeigneter Verallgemeinerung des Begriffes, nach den gewöhnlichen Regeln der Arithmetik gerechnet werden kann, lehrt folgende Betrachtung, die eine Nachbildung des in § 13 bei der Anwendung der vier Spezies auf Differenzen- und Differentialquotienten befolgten Gedankenganges ist.

Es werden hierbei aus der Arithmetik nur die rationalen Zahlen (Brüche ganzer Zahlen) und das Rechnen mit ihnen als bekannt vorausgesetzt. Durch ein Gesetz sei eine beliebig fortsetzbare (oder unendliche) Anordnung:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+p}, \ldots \tag{7}$$

von positiven oder negativen**) Brüchen festgelegt, mit der Eigenschaft, dass bei genügend grossem n und beliebigem p

*) In diesem Sinne nennt man auch $R_{n,p}$ kurz den „Rest" oder den „Fehler" der Reihe.

**) Ist die Bedingung (8) erfüllt, so können — mit Ausnahme des Falles, wo $\lim a_n = 0$ — von einer gewissen Stelle an die Glieder (7) nur noch gleichnamig sein. Denn da $\lim a_n \neq 0$, so lässt sich so hoch annehmen, dass von der n^{ten} Stelle an $|a_n| > \varepsilon$ wird; wären dann a_n und a_{n+p} ungleichnamig, so würde $|a_{n+p} - a_n| > 2\varepsilon$ usw. fallen, entgegen (8).

(8) $$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

ist, wo ε einen beliebig klein annehmbaren positiven Bruch bedeutet. Eine derartige Anordnung (7) heisst nach G. Cantor eine „Fundamentalreihe“ *), und man bedient sich des Ausdrucks, dass sie einen „Grenzwert“ A besitze (oder „gegen einen solchen konvergiere“), in Zeichen:

(9) $$A = \lim a_n .$$

Die Eigenschaft (8) drückt aus, womit zugleich das Bedürfnis des praktischen **) Rechnens befriedigt wird, dass der Wert a_n bei genügend grossem n nur beliebig wenig geändert wird, wenn er durch irgend ein in (7) später folgendes Glied a_{n+p} ersetzt wird, oder mit anderen Worten, dass der beim Abbrechen hinter a_n begangene absolute „Fehler“ $< \varepsilon$ ist.

Sei analog eine zweite Fundamentalreihe:

(7′) $$b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots, b_{n+p}, \ldots$$

(8′) $$|b_{n+p} - b_n| < \eta,$$

mit dem Grenzwerte B vorgelegt, so sollen auf A, B die vier Spezies in der Art angewandt werden, dass man aus (7), (7′) vier neue Anordnungen ableitet, deren n^{tes} Glied jeweils resp. die Summe, Differenz, Produkt, Quotient der n^{ten} Glieder in (7), (7′) ist.

Es ist dann zu zeigen, dass die neuen Anordnungen wiederum Fundamentalreihen sind, und dass deren Grenzwerte dieselben arithmetischen Regeln befolgen wie die Begriffe „Summe, Differenz, Produkt, Quotient“ zweier rationalen Zahlen.

Die beiden ersten neuen Anordnungen:

(10) $$\begin{cases} a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots, a_{n+p} + b_{n+p}, \ldots \\ a_0 - b_0, a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n, \ldots, a_{n+p} - b_{n+p}, \ldots \end{cases}$$

---

*) Der Fall der „endlichen“ Fundamentalreihe ist in (7) als Spezialfall enthalten: wenn nämlich für irgend ein n $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$, so ist $A = a_n$.

**) In der That entspricht die elementare Art, wie mit den Näherungswerten $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ unendlicher Dezimalbrüche (als Darstellung irrationaler Zahlen) gerechnet wird, ganz den Eigenschaften der Fundamentalreihen.

sind Fundamentalreihen, da aus (8), (8′) unmittelbar folgt:

$$|(a_{n+p}+b_{n+p})-(a_n+b_n)|<\varepsilon+\eta \tag{11}$$
$$|(a_{n+p}-b_{n+p})-(a_n-b_n)|<\varepsilon+\eta.$$

Demnach werden die Grenzwerte von (10) resp. mit $A+B$, $A-B$ bezeichnet. Ist $\lim(a_n-b_n)=0$, so heissen A, B einander **gleich**: $A=B$, womit das Mittel der Vergleichung zweier Fundamentalreihen gegeben ist; wenn $A=B$, $B=C$, so ist auch $A=C$.

Bildet man drittens die Anordnung der Produkte:

$$a_0b_0,\ a_1b_1,\ \ldots,\ a_nb_n,\ \ldots,\ a_{n+p}b_{n+p},\ \ldots, \tag{12}$$

und führt, wie in § 13, die Differenzen:

$$a_{n+p}-a_n=E_{n,p},\quad b_{n+p}-b_n=H_{n,p} \tag{13}$$

ein, dann wird:

$$\begin{aligned} a_{n+p}b_{n+p}-a_nb_n&=(a_n+E_{n,p})(b_n+H_{n,p})-a_nb_n \\ &=a_nH_{n,p}+b_nE_{n,p}+E_{n,p}H_{n,p}, \end{aligned} \tag{14}$$

und es folgt gemäss (8), (8′), wenn noch die absoluten Werte von a_n, b_n mit α_n, β_n bezeichnet werden:

$$|a_{n+p}b_{n+p}-a_nb_n|<\alpha_n\eta+\beta_n\varepsilon+\varepsilon\eta, \tag{15}$$

d. h. die linke Seite kann bei genügend grossem n beliebig klein gemacht werden, oder sie „konvergiert zugleich mit ε, η gegen Null."

Endlich ergiebt sich mittels (13) für die Anordnung der Quotienten:

$$\frac{a_0}{b_0},\ \frac{a_1}{b_1},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots,\ \frac{a_{n+p}}{b_{n+p}},\ \ldots: \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}-\frac{a_n}{b_n}&=\frac{(a_n+E_{n,p})b_n-(b_n+H_{n,p})a_n}{b_nb_{n+p}} \\ &=\frac{b_nE_{n,p}-a_nH_{n,p}}{b_nb_{n+p}}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\left|\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}-\frac{a_n}{b_n}\right|<\frac{\beta_n\varepsilon+\alpha_n\eta}{\beta_n\beta_{n+p}}. \tag{18}$$

Schliesst man hier den Fall $\lim\beta_n=0$, d. i. $B=0$, ausdrücklich aus, so lässt sich bei genügend grossem n stets

ein fester positiver Bruch ζ derart angeben, dass $\beta_n, \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{n+p}, \ldots$ grösser als ζ bleiben; dann geht (18) über in:

$$\left|\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{\beta_n \varepsilon + a_n \eta}{\zeta^2}, \tag{18a}$$

so dass wiederum die linke Seite zugleich mit ε, η gegen Null konvergiert.

Demnach sind auch (12), (16) Fundamentalreihen, und ihre Grenzwerte werden als Produkt AB und als Quotient $\frac{A}{B}$ eingeführt (wobei nach obigem die Division mit Null ausgeschlossen wird).

Für diese Verallgemeinerungen $A \pm B$, AB, $\frac{A}{B}$ der Begriffe Summe, Differenz, Produkt, Quotient — die im speziellen Falle endlicher Fundamentalreihen, wenn von einem gewisses n an:

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0, \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = 0,$$

offenbar mit den entsprechenden gewöhnlichen Begriffen für rationale Zahlen zusammenfallen — gelten, wie leicht zu zeigen*), die Fundamentalgesetze der Arithmetik (siehe diese Sammlung Bd. I, §§ 5—14):

a) das kommutative Gesetz der Addition:

$$A + B = B + A;$$

im besonderen ist:

$$A + 0 = 0 + A = A;$$

b) das associative**) Gesetz der Addition:

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$

*) Wegen der näheren Ausführung s. z. B. R. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, I, Bonn 1877, § 16, sowie die kritischen Bemerkungen von A. Pringsheim, Jahres-Bericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VII, 1899, S. 138.

**) Aus a) und b) folgt das „allgemeine Associationsgesetz der Addition", dass es bei der Addition von n Gliedern gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge man addiert, und wie man die Glieder in Gruppen zusammenfassen möge. Ganz entsprechend folgt aus c) und d) das „allgemeine Associationsgesetz der Multiplikation."

c) das kommutative Gesetz der Multiplikation:

$$AB = BA;$$

im besonderen ist:

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A;$$

d) das associative*) Gesetz der Multiplikation:

$$A(BC) = (AB)C;$$

e) das Gesetz für das Verschwinden eines Produktes AB verschwindet dann und nur dann, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren verschwindet;

f) das distributive Gesetz für Addition und Multiplikation:

$$A(B + C) = AB + AC;$$

g) die Subtraktion resp. Division stellen sich als Umkehrung der Addition resp. Multiplikation dar.

Alle die genannten Sätze über Fundamentalreihen bleiben erhalten, wenn nunmehr a_n, b_n selbst Grenzwerte solcher Reihen sind.

Auf Grund der Gesetze a) bis g) lässt sich eine vollständige Theorie der Irrationalzahlen aufbauen.

Es ist ersichtlich, wie sich unter dem gegenwärtigen Gesichtspunkt des Grenzwertes der in § 8 eingeführte Begriff der Ableitung einer Funktion $f(x)$ einordnet. Geht man vom Differenzenquotienten $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ aus, und schaltet zwischen den beiden Endwerten h und 0 eine Fundamentalreihe:

$$h,\ h_1,\ \ldots,\ h_n,\ \ldots,\ h_{n+p},\ \ldots,\ \lim h_n = 0$$

ein $\left(\text{z. B. } h_n = \frac{h}{n}\right)$, so ist auch:

---

*) Siehe Anmerkung **) auf S. 321.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ \frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1},\ \ldots,$$

(19)
$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n},\ \ldots$$

falls in früherem Sinne $\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ eindeutig bestimmt ist, eine Fundamentalreihe — mit dem Grenzwert $f'(x)$ — und umgekehrt.

Bei sämtlichen speziellen, in den §§ 8—12 differenzierten Funktionen liess sich die Existenz der Ableitung als Grenzwert direkt auf Grund von deren expliziter Herstellung ermitteln.

Nach diesem Exkurse über Grenzwerte im allgemeinen kehren wir zu den Reihen (2) mit positiven Gliedern u zurück.

Ein einfaches, aber grundlegendes Beispiel ist die unendliche geometrische Reihe (s. § 2, S. 11, 12):

(20) $$1+g+g^2+\ldots+g^{n-1}+g^n+\ldots+g^{n+p-1}+g^{n+p}+\ldots$$
(g positiv),

wo:

(21) $$s_n=\frac{1-g^n}{1-g}=\frac{g^n-1}{g-1},$$
$$R_{n,p}=g^n(1+g+\ldots+g^{p-1})=g^n\cdot\frac{1-g^p}{1-g}=g^n\cdot\frac{g^p-1}{g-1}.$$

Für $g<1$ wird $R_{n,p}<\frac{g^n}{1-g}$; soll $\frac{g^n}{1-g}$ und damit $R_{n,p}$ unter die beliebig kleine Grösse η heruntergedrückt werden, so bestimmt sich n aus: $n>\frac{\lg\frac{1}{\eta(1-g)}}{\lg\frac{1}{g}}$. Zugleich wird $s_n=\frac{1}{1-g}-\frac{g^n}{1-g}$, d. h. die Summe einer beliebig grossen Anzahl von Gliedern von (20) unterscheidet sich von $\frac{1}{1-g}$ um weniger als die beliebig kleine Grösse η. Ist $g\geqq 1$, *so ist die Divergenz von* (20) unmittelbar ersichtlich. *Es gilt also der Satz:*

(B.) „Die geometrische Reihe (20) konvergiert für $g < 1$, divergiert für $g \geqq 1$. Im ersteren Falle ist die Summe der Reihe $= \frac{1}{1-g}$. Bricht man hinter dem n^{ten} Gliede ab, so ist der Rest oder Fehler der Reihe $< \frac{g^n}{1-g}$."

Aus der Definition (A.) der Konvergenz und Divergenz von Reihen (2) mögen jetzt einige Folgerungen gezogen werden.

Konvergiert die Reihe (2), so ist $\lim u_n = 0$. Denn andernfalls liesse sich eine feste, wenn auch noch so kleine (positive) Grösse α angeben, sodass, wenigstens von einer gewissen Stelle an, stets $u_n > \alpha$ wäre. Dann wäre aber $R_{n,p} > p\alpha$, würde also bei beliebig grossem p jeden endlichen Wert überschreiten.

(C.) „Eine *notwendige* Bedingung zur Konvergenz der Reihe (2) ist $\lim u_n = 0$."*)

Dass diese Bedingung indessen noch keine hinreichende ist, lehrt die sogenannte „harmonische" Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p} + \ldots \tag{22}$$

Zum Beweise bediene man sich des Jac. Bernoullischen, bereits in § 20 (S. 282 flg.) bei der Untersuchung von $\lim m_n$ verwandten Prinzips der „Zusammenfassung der Glieder in Gruppen". Es bestehen die Ungleichungen:

---

*) Die Bedingung $\lim u_n = 0$ verlangt aber durchaus nicht, dass (von einer gewissen Stelle ab) eine gliedweise Abnahme stattfindet. In der That braucht man nur in einer konvergenten Reihe (2), für die stets $u_{n+1} < u_n$ ist, gemäss Satz (F.) eine paarweise Umstellung der Glieder derart vorzunehmen, dass in der neuen Reihe (2′) bei geradem n $u'_n = u_{n-1}$, bei ungeradem n $u'_n = u_{n+1}$ ist. Damit ergiebt sich eine konvergente Reihe, deren Glieder abwechselnd zu- und abnehmen, während $\lim u_n = 0$ ist.

$$(23)\quad \begin{cases} 1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ \text{i. e.}>\frac{1}{2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{2^\nu+1}+\frac{1}{2^\nu+2}+\cdots+\frac{1}{2^{\nu+1}} \\ \qquad >\underbrace{\frac{1}{2^{\nu+1}}+\frac{1}{2^{\nu+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{\nu+1}}}_{2^\nu\,\text{mal}} \\ \qquad\qquad \text{i. e.}>\frac{1}{2}\ (\nu=1,\,2,\,\ldots). \end{cases}$$

Geht man also von $u_0 = 1$ bis zum Gliede $u_{n-1} = u_{2^\nu+1} = \frac{1}{2^{\nu+1}}$, so ist $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ sicher $> \frac{1}{2}\cdot\nu$, überschreitet also bei wachsendem n jede Grenze. Ganz entsprechend wird dasselbe für den Rest $R_{n,p}$ bewiesen. Also gilt:

(D.) „Die harmonische Reihe (22) divergiert."

Hieraus folgt wieder eine Verschärfung des Kriteriums (C): dass für die Konvergenz einer Reihe (21) auch die Bedingung $\lim_{n=\infty} n u_n = 0$ notwendig ist. Denn wäre $n u_n$, wie gross auch n würde, stets grösser als eine feste (wenn auch noch so kleine), positive Grösse ε, also $u_n > \frac{\varepsilon}{n}$, so hätte man für den Rest $R_{n,p}$ (4):

$$R_{n,p} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$
$$> \varepsilon\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p-1}\right),$$

mithin $\lim R_{n,p} = \infty$.

Aber auch die Bedingung $\lim n u_n = 0$ ist keine **hinreichende** Konvergenzbedingung für Reihen (2), wie die von **Cauchy** aufgestellte Reihe:

$$(22')\quad \frac{1}{2\,l\,2} + \frac{1}{3\,l\,3} + \ldots + \frac{1}{n\,l\,n} + \frac{1}{(n+1)\,l(n+1)} + \ldots$$

lehrt, wo ersichtlich $\lim n u_n = \lim \frac{1}{l n} = 0$ ist.

Um diese Reihe zu untersuchen, benötigen wir einer einfachen Beziehung (Ungleichheit) zwischen dem natürlichen Logarithmus und seinem Argument. Man bilde sich die Funktion $\varphi(x) = x - l(1+x)$: diese verschwindet für $x = 0$, ist stetig für $x \geqq 0$, und es ist $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ für $x \geqq 0$ stetig und nicht negativ. Mithin ist für jedes positive x*) gemäss § 18 (I), S. 226:

$$l(1+x) < x \,(x > 0).$$

Setzt man hier $x = \frac{1}{n}$, so kommt:

$$l(n+1) - ln < \frac{1}{n}$$**)

oder:

$$l(n+1) < ln + \frac{1}{n}$$

oder auch:

$$l(n+1) < ln\left(1 + \frac{1}{n\,ln}\right).$$

Logarithmiert man diese Ungleichung von Neuem, und bedient sich der Abkürzung $l\{l(x)\} = l_2(x)$, so hat man:

$$l_2(n+1) < l_2(n) + l\left(1 + \frac{1}{n\,ln}\right),$$

---

*) Analog zeigt man, dass für jedes positive x zwischen 0 und 1: $l\left(\frac{1}{1-x}\right) > x$ ist. Denn die Funktion $\psi(x) = l\left(\frac{1}{1-x}\right) - x$ verschwindet für $x = 0$, ist stetig für x zwischen 0 und 1, und $\psi'(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ ist für solche Werte von x stetig und nicht negativ.

Diese Ungleichungen $l(1+x) > x$, $l\left(\frac{1}{1-x}\right) > x$ hätte man auch dem erweiterten Mittelwertsatze (§ 18) für $e^{1 \pm x}$ resp. $l(1 \pm x)$, oder auch den Reihen (§ 21) für diese Funktionen entnehmen können.

**) Hieraus fliesst sofort ein zweiter Beweis für die Divergenz der harmonischen Reihe (22). Denn stellt man die Ungleichung $\frac{1}{n} > l(n+1) - ln$ für die Werte $n = 1, 2, \ldots n$ auf und addiert, so ergiebt sich $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > l(n+1)$. Es ist aber

$$\lim_{n=\infty} l(n+1) = \infty.$$

oder da nach obigem $l(1+\frac{1}{n\,ln})<\frac{1}{n\,ln}$:

$$l_2(n+1)-l_2(n)<\frac{1}{n\,ln}.$$

Substituiert man hier für n die Werte $2, 3, \ldots n$, und addiert, so folgt für die vorgelegte Reihe (22′):

$$\frac{1}{2\,l\,2}+\frac{1}{3\,l\,3}+\ldots+\frac{1}{n\,ln}>l_2(n+1)-l_2(2).$$

Da aber $\lim\limits_{n=\infty} l_2(n)=\infty$, so divergiert die Reihe (22′). Fährt man in der angegebenen Weise fort, und setzt successive $l_3(x)=l\{l_2(x)\}$, $l_4(x)=l\{l_3(x)\}$ u. s. w., so gelangt man zu divergenten Reihen mit den respektiven Gliedern

$$u_n=\frac{1}{n\,ln\,l_2 n},\quad u_n=\frac{1}{n\,ln\,l_2 n\,l_3 n},\quad u_n=\frac{1}{n\,ln\,l_2 n\,l_3 n\,l_4 n}\text{ u.s.w.},$$

und hieraus folgt wiederum die weitere Verschärfung des Kriteriums (C):

(C′) „Zur Konvergenz einer Reihe (21) sind *notwendig* (aber *nicht hinreichend*) die Bedingungen:

$$\lim u_n=0,\ \lim n\,u_n=0,\ \lim n\,ln\,l_2 n=0,$$
$$\lim n\,ln\,l_2 n\,l_3 n=0 \text{ u. s. w.}^*)$$

Ferner lässt sich die Definition (A.) der Konvergenz einer Reihe (2) derart umkehren, dass (2) konvergiert, sobald man weiss, dass s_n stets unter einer festen vorgegebenen (positiven) Grösse G bleibt. Würde nämlich (2) dann nicht konvergieren, so liesse sich eine feste, wenn auch noch so kleine (positive) Grösse α derart angeben, dass für jedes n und ein genügend grosses p $R_{n,p}>\alpha$ würde. Somit gäbe es für $n=1$ ein $p=p_1$, so dass $s_{p_1}>\alpha$ wäre; für $n=p_1$ ein $p=p_2$, so dass $R_{p_1,p_2}>\alpha$; für $n=p_2$ ein $p=p_3$, so dass $R_{p_2,p_3}>\alpha$ etc., somit durch Addition ein $p=p_\nu$, dass $s_\nu>\nu\alpha$ würde, entgegen der Voraussetzung. Demnach gilt:

*) Weiterhin liesse sich hieraus nach Abel folgern, dass überhaupt eine notwendige und zugleich hinreichende Konvergenzbedingung für die Reihen (21) in der Form $\lim f(n)\,u_n=0$, wo $\lim f(n)=\infty$, nicht aufstellbar ist.

(E.) „Die Bedingung, dass s_n stets unterhalb einer festen Grenze bleibt, ist eine notwendige und hinreichende für die Konvergenz der Reihe (2)."

Man wird weiter fragen, ob auch eine Summe (2) von unbegrenzt vielen Gliedern das allgemeine associative Gesetz (s. S. 321, Anm. **) der Addition befolgt, d. h. ob der Grenzwert der Reihe (2) stets derselbe bleibt, wie auch die Glieder der Reihe umgestellt werden. Dass jede durch andere Anordnung der Glieder aus (2) hervorgehende Reihe (2') konvergiert, geht unmittelbar aus (E.) hervor. Es gehe jetzt vermöge irgend eines Umstellungsgesetzes jedes Glied u_i von (2) in ein bestimmtes Glied u_{α_i} der neuen Reihe (2') über, also die ersten n Glieder $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ von (2) über in resp. $u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_{n-1}}$. Von den natürlichen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sei $\alpha_k = \alpha$ die grösste, so ist $\alpha \geqq n-1$. Dann enthält die Summe $s'_{\alpha+1}$ der ersten $\alpha+1$ Glieder in (2') jedenfalls die Glieder $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ von (2), im allgemeinen aber noch weitere Glieder von (2). Das im letzteren Falle die höchste Stelle in (2) einnehmende Glied sei u_{n+p-1} $(p \geqq 0)$. Bildet man nunmehr die Differenz $s'_{\alpha+1} - s_n$, so zerstören sich in ihr die Glieder $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, während die noch verbleibenden sämtlich in $R_{n,p}$ vorkommen müssen. Somit wird in allen Fällen:

$$s'_{\alpha+1} - s_n \leqq R_{n,p} \quad (\alpha + 1 \geqq n).$$

Da aber bei wachsendem n $R_{n,p}$ gegen Null konvergiert, so auch $s'_{\alpha+1} - s_n$, d. h. es ist $\lim s'_{\alpha+1} = \lim s_n$.

(F.) „Eine konvergente Reihe (2) hat stets denselben Grenzwert, gleichgültig nach welchem Gesetze ihre Glieder angeordnet werden."

In diesem Sinne heisst eine konvergente Reihe (2) absolut konvergent.

Um nunmehr eine vorgelegte Reihe (2) auf ihre Konvergenz resp. Divergenz zu prüfen, wird man sie mit einer anderen Reihe:

$$(2') \qquad u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_{n-1} + u'_n + u'_{n+1} + \ldots + u'_{n+p-1} + u'_{n+p} + \ldots,$$

ren Konvergenz resp. Divergenz bereits bekannt ist, ver-
eichen. Aus der Definition (A.) folgt unmittelbar als
ıfachste Regel das „Kriterium erster Art“:

(G.) „Aus der Konvergenz resp. Divergenz einer Reihe (2′) folgt die Konvergenz resp. Divergenz einer analogen Reihe (2), sobald, wenigstens von einer gewissen Stelle an $u_n \leqq u_n'$ resp. $u_n \geqq u_n'$, d. h. sobald jedes Glied u_n der zweiten Reihe nicht grösser resp. nicht kleiner ist, als das entsprechende Glied u_n' der ersten Reihe.“

Im Falle der Konvergenz bedient man sich dabei des
usdrucks, man habe die zweite Reihe unter die erste
heruntergedrückt.“

Indessen zeigt schon das Beispiel der geometrischen
eihe (20), wie auch die in § 20 auftretenden Entwickelungs-
ihen, dass der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zweier aufeinander folgender
lieder von (2) oft ein wesentlich einfacheres Gesetz be-
lgt, als das einzelne Glied u_n. Man wird demnach, nach
nleitung von (G.), in solchen Fällen behufs Zurückführung
er Konvergenz von (2) auf die von (2′), annehmen, dass,
iederum wenigstens von einer bestimmten n^{ten} Stelle an,
ets die Ungleichungen gelten:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{u_n'+1}{u_n'}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \leqq \frac{u_n'+2}{u_{n+1}'}, \quad \ldots,$$
$$\frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} \leqq \frac{u_n'+p}{u_{n+p-1}'}, \quad \ldots \tag{4}$$

Multipliziert man, wie in § 20 (S. 273), die ersten
vei, drei, ... dieser Ungleichungen, so entsteht das ein-
chere System von Ungleichungen:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{u_n'+1}{u_n'}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_n} \leqq \frac{u_n'+2}{u_n'}, \quad \ldots,$$
$$\frac{u_{n+p}}{u_n} \leqq \frac{u_n'+p}{u_n'}, \quad \ldots \tag{5}$$

Da sich die Reste $R_{n,p}$, $R_{n,p}'$ der Reihen (2), (2′) in
ie Gestalt setzen lassen:

$$(26)\quad \begin{cases} R_{n,p} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1} \\ \qquad = u_n\left(1 + \frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{u_{n+2}}{u_n} + \ldots + \frac{u_{n+p-1}}{u_n}\right), \\ R'_{n,p} = u'_n + u'_{n+1} + \ldots + u'_{n+p-1} \\ \qquad = u'_n\left(1 + \frac{u'_{n+1}}{u'_n} + \frac{u'_{n+2}}{u'_n} + \ldots + \frac{u'_{n+p-1}}{u'_n}\right), \end{cases}$$

so folgt aus (25), dass $\frac{R_{n,p}}{u_n} \leqq \frac{R'_{n,p}}{u'_n}$, oder:

$$(27)\qquad R_{n,p} \leqq \frac{u_n}{u'_n} R'_{n,p}.$$

Hier stellt $\frac{u_n}{u'_n}$ einen festen Faktor dar, während $R'_{n,p}$, falls die Konvergenz von (2′) vorausgesetzt wird, gemäss (E.) unterhalb einer festen angebbaren Grösse bleibt, wie gross p auch sei; mithin gilt das nämliche auch von $R_{n,p}$, und somit auch von $s_n + R_{n,p} = s_{n+p}$, d. h. wiederum auf Grund von (E.), es konvergiert auch die Reihe (2).

Gelten dagegen in (24), also auch in (25), die Grösser-Zeichen statt der Kleiner-Zeichen, so folgt aus:

$$R_{n,p} \geqq \frac{u_n}{u'_n} R'_{n,p}$$

unmittelbar, dass dann die Divergenz von (2′) die von (2) nach sich zieht. Somit gilt das „Kriterium zweiter*) Art“

(H.) „Die Konvergenz resp. Divergenz einer Reihe (2′) zieht die einer analogen Reihe (2) nach sich, sobald, wenigstens von einer bestimmten n^{ten} Stelle an, der Quotient zweier successiven Glieder $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ $(\nu = n, n+1, \ldots)$ der zweiten Reihe niemals grösser resp. niemals kleiner ist, als der entsprechende Quotient $\frac{u'_{\nu+1}}{u'_\nu}$ der ersten Reihe. Im Falle der Kon-

*) Man nennt ein Konvergenz- oder Divergenzkriterium erster resp. zweiter Art, jenachdem es ausschliesslich von u_n oder aber von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ abhängt.

vergenz bestimmt sich das Fehlergesetz für (2) durch (27).“

Im Falle der Konvergenz sagt man wiederum, dass die rgelegte Reihe (2) unter die bekannte (2′) „herunter-drückt“ sei.

Als nächstliegende Anwendung von (H.) empfiehlt sich, as schon in § 20 (S. 274) benutzt wurde, der Vergleich ner Reihe (2) mit der geometrischen Reihe (20), wo also:

0) $$u'_i = g^i \quad (g>0, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Hier ist $\frac{u'_{i+1}}{u_i} = g$; sobald also von einer bestimmten, ten Stelle an, stets:

28) $$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \leqq g \quad (g<1, \quad \nu=n,\ n+1,\ \ldots),$$

o ergiebt sich auf Grund von (21), (27) und (H.) die Konergenz der Reihe der u und:

29) $$R_{n,p} < u_n \frac{1}{1-g};$$

obald dagegen $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \geqq g\,(g>1)$, so divergiert die Reihe ler u. Damit ist das nach Cauchy benannte Konvergenz- esp. Divergenzkriterium zweiter Art abgeleitet:

(I.) „Wenn in einer vorgelegten Reihe (2) von einer bestimmten n^{ten} Stelle an der Quotient $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}(\nu=n, n+1,\ldots)$ niemals eine angebbare feste positive Grösse g, die <1, überschreitet, so konvergiert die Reihe: bricht man hinter dem n^{ten} Gliede u_{n-1} ab, so ist der begangene Fehler kleiner als das Produkt aus dem nächstfolgenden Gliede u_n in $\frac{1}{1-g}$; ist dagegen umgekehrt der Quotient $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ nie kleiner als eine angebbare feste Grösse g, die $\geqq 1$, so divergiert die Reihe.“

Es ist hier zu betonen, dass eine derartige positive Grösse <1 wirklich angebbar sein muss, um die vorgelegte Reihe nter eine konvergente geometrische herunterzudrücken.

Dass die blosse Bedingung $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} < 1$ nicht hinreicht, zeigt schon die divergente harmonische Reihe (22), bei der:

(30) $$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{\nu}} < 1;$$

trotzdem lässt sich, wie nahe auch eine Grösse $g\,(<1)$ an 1 liegen mag, stets n so gross wählen, dass $\frac{u_{n+1}}{u_n} > g$ bleibt.

Wir führen einige Beispiele zu (I.) an. Bei der „Exponentialreihe“:

(31) $$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad (x > 0)$$

ist $u_n = \frac{x^n}{n!}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$. Sobald also n so gross gewählt ist, dass $x < n+1$ wird, nehme man $g = \frac{x}{n+1}$, dann ist das Konvergenzkriterium (I.) erfüllt, und der Fehler $R_{n,p}$ ist $< \frac{x^n}{n!} \frac{1}{1-\frac{x}{n+1}}$, in Übereinstimmung mit der Fehlerregel der Reihe für e^x (§ 12 (V), S. 136).

Als zweites Beispiel diene die „logarithmische“ Reihe:

(32) $$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \qquad (x \text{ positiv}, < 1),$$

wo $\frac{u_{n+1}}{u_n} = x\frac{n}{n+1}$. Man wähle daher $g = x$, dann ist das Konvergenzkriterium (I.) bereits vom ersten Gliede an erfüllt; der Fehler $R_{n,p}$ ist $< \frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{1-x}$, übereinstimmend mit der Regel (§ 20 (16b), S. 274) der Reihe für $-l(1-x)$.

Ein drittes Beispiel sei die „binomische“ Reihe für negative x:

(33) $1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \dots \quad (x = -\xi,\ 0 < \xi < 1)$.

Nach § 20, (S. 281) sind von einer gewissen Stelle an (nämlich bei positivem m von da an, wo m_i vom Positiven ins Negative übergeht, bei negativem m von Anfang an) *alle Glieder* gleichnamig, so dass $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \xi\frac{n-m}{n+1}$ als positiv

angesehen werden kann. Weiterhin lässt sich aber n so gross wählen, dass von da an $\xi\frac{n-m}{n+1} < g\,(<1)$ bleibt. Denn wenn m positiv, und auch, wenn m negativ $= -\mu$, $\mu \leqq 1$, nehme man $g = \xi$; ist aber m negativ $= -\mu$ und $\mu > 1$, so wähle man g zwischen ξ und 1 und $n > \frac{\xi\mu - g}{g - \xi}$.

Auch dies stimmt überein mit den in § 20 (S. 281, 282) bezüglich der binomischen Reihe für $(1-\xi)^m$ angegebenen Fehlerregeln.

Nunmehr mögen solche Reihen (2) auf ihre Konvergenz geprüft werden, wo das Cauchysche Kriterium (I.) versagt, d. h. wo zwar, von einer gewissen Stelle an, stets $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, aber $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ wird. Hierher gehört das Beispiel:

$$(34)\quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Nimmt man hier:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

so wird:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}}, \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Nun ist:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$(35)\qquad u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}, \ldots,$$

$$u_{n+p-1} = \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p},$$

demnach ergiebt sich durch Addition:

$$R_{n,p} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$$

$$(36)\qquad = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}. \quad \text{i. e.} < \frac{1}{n}.$$

Somit konvergiert die Reihe (34), und ihre Summe ist, da man in gleicher Weise $s_n = 1 - \frac{1}{n}$ erhält, gleich 1.

Trotzdem wird sich (34) nicht als Vergleichsreihe eignen, man wird sich zu dem Behuf vielmehr eine solche konstruieren, in der, wie oben bei der geometrischen die Grösse g, noch eine disponible Grösse auftritt. Eine solche Reihe ergiebt sich durch geeignete Verallgemeinerung der harmonischen Reihe (22):

$$1 + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\sigma} + \frac{1}{n^\sigma} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)^\sigma} + \ldots, \tag{37}$$

die als „hyperharmonische" Reihe bezeichnet sei, und die sich für $\sigma = 1$ auf die harmonische reduziert. Für $\sigma = 1$ divergiert (37) gemäss (G), und zwar noch stärker als (22); dagegen nehmen für $\sigma > 1$ die Glieder schneller ab, als bei (22), sodass die Möglichkeit der Konvergenz besteht.

Da:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\sigma = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\sigma}, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \tag{38}$$

so versagt in der That (I.). Indessen lässt sich für $\sigma > 1$ die Konvergenz von (37) analog feststellen, wie die Divergenz von (22). Setzt man zur Abkürzung $\sigma = 1 + r\,(r > 0)$, $\frac{1}{2^r} = g\,(< 1)$, so gilt:

$$\begin{cases} 1 = 1, \quad \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} < \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} \text{ i. e.} < \frac{2}{2^\sigma} \text{ i. e.} < g, \\ \frac{1}{4^\sigma} + \frac{1}{5^\sigma} + \frac{1}{6^\sigma} + \frac{1}{7^\sigma} < \frac{1}{4^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} \text{ i. e.} < \frac{4}{4^\sigma} = g^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{(2^\nu)^\sigma} + \frac{1}{(2^\nu+1)^\sigma} + \ldots + \frac{1}{(2^{\nu+1}-1)^\sigma} \\ \quad < \underbrace{\frac{1}{(2^\nu)^\sigma} + \frac{1}{(2^\nu)^\sigma} + \ldots + \frac{1}{(2^\nu)^\sigma}}_{2^\nu \text{ mal}} \text{ i. e.} < \frac{2^\nu}{(2^\nu)^\sigma} \text{ i. e.} < g^\nu. \end{cases} \tag{39}$$

Bricht man daher hinter dem Gliede $u_{n-1} = \frac{1}{(n-1)^\sigma}$ ab, wo $n \geqq 2^\nu$ sei, so lässt sich der Rest $R_{n,p}$ unter die geometrische Reihe $g^\nu + g^{\nu+1} + g^{\nu+2} + \ldots$ herunterdrücken:

$$(40) \qquad R_{n,p} < \frac{g^\nu}{1-g} \text{ i. e. } < \frac{1}{(2^{\sigma-1})^\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\sigma-1}}},$$

konvergiert also mit wachsendem n gegen Null. Damit gilt:

(J.) „Die hyperharmonische Reihe (37) divergiert für $\sigma \leqq 1$, konvergiert für $\sigma > 1$; bricht man im letzteren Falle hinter einem Gliede u_{n-1} ab, wo $n \geqq 2^\nu$, so beträgt der Fehler weniger als:

$$\frac{1}{(2^{\sigma-1})^\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\sigma-1}}} = \frac{1}{2^{(\sigma-1)(\nu-1)}(2^{\sigma-1}-1)}.“$$

Um jedoch eine vorgelegte Reihe mit (37) bequem vergleichen zu können, möge die in Rede stehende Konvergenz- resp. Divergenzeigenschaft von (37) umgeformt werden. Mit Rücksicht auf (38) bilde man die Differenz:

$$(41) \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\sigma - 1,$$

dann konvergiert dieselbe bei wachsendem n (von oben her) gegen Null. Nun wurde bereits in § 3, S. 28 (vgl. auch § 17, S. 216) nachgewiesen, dass

$$(42) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\sigma - 1}{\frac{1}{n}} = \sigma$$

war. Es werde hier hinzugefügt, dass diese Konvergenz für $\sigma > 1$ von oben her, für $0 < \sigma < 1$ von unten her erfolgt, d. h. dass:

$$(43) \qquad \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\sigma - 1}{\frac{1}{n}} \gtrless \sigma (> 0), \quad \sigma \gtrless 1.$$

In der That, sei $\sigma > 1$ und zunächst rational $= \frac{\alpha}{\beta} (\alpha > \beta)$ angenommen, so ist:

$$\alpha - 1 > \alpha - \sigma, \quad \alpha - 2 > \alpha - 2\sigma, \ldots,$$

mithin auch:

$$1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$> 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha-\sigma)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha(\alpha-\sigma)(\alpha-2\sigma)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \ldots$$

d. h. es ist auf Grund des binomischen Satzes:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} > \left(1 + \frac{\sigma}{n}\right)^{\beta} \text{ i. e. } \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sigma} - 1}{\frac{1}{n}} > \sigma.$$

Ist aber σ nicht rational, so lässt es sich mit beliebiger Genauigkeit zwischen zwei Brüchen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha+1}{\beta}$ einschliessen, und der Beweis ist auf diesen Fall übertragbar. Entsprechend verfahre man im Falle $0 < \sigma < 1$.

Man hat demnach:

(K) „Der hyperharmonischen Reihe (37) kommt die Eigenschaft zu:

$$(44) \qquad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sigma} - 1\right\} \gtrless \sigma (>0), \ \sigma \gtrless 1^{*}).$$

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \sigma \left(\gtrless 0\right).“$$

Danach lässt sich erwarten, dass eine vorgelegte Reihe (2) konvergiert, resp. divergiert, sobald:

$$(45) \qquad \lim_{n=\infty} \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \sigma, \ \sigma > 1 \text{ resp. } < 1.$$

*) Für ein negatives σ vertauschen sich offenbar beide Ungleichheitszeichen, während $\sigma \gtrless 1$ durch $|\sigma| \gtrless 1$ zu ersetsen ist.

Sei zuerst $\sigma > 1$, so sagt (45) aus, dass man n so hoch wählen kann, dass von da ab $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ von $1 + \frac{\sigma}{n}$ nicht mehr, als um eine beliebig kleine, vorgegebene Grösse ε abweicht:

$$(46) \qquad \sigma - \varepsilon \leqq \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \leqq \sigma + \varepsilon .$$

Bezeichnet man für den Augenblick die Glieder der hyperharmonischen Reihe (37) für einen Wert $\sigma = \sigma' (> 1)$ mit u'_n, so handelt es sich darum, σ' so gross zu wählen, dass, von einem gewissen n an, stets:

$$(47) \qquad \frac{u'_n}{u'_{n+1}} \leqq \frac{u_n}{u_{n+1}}, \text{ oder auch } \frac{u'_n}{u'_{n+1}} - 1 \leqq \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1$$

wird; dann müsste auf Grund von (H.) auch die vorgelegte Reihe der u konvergieren.

Andererseits lässt sich n auch so hoch annehmen, dass $\frac{u'_n}{u'_{n+1}} - 1$, das gemäss (K.) bei wachsendem n von oben her gegen σ' konvergiert, von da ab in das Intervall $(\sigma', \sigma' + \eta)$ fällt, wie klein auch die positive Grösse η vorgegeben sei. Soll demnach von der betreffenden Stelle an, wie es (47) verlangt, der Wert von $\frac{u'_n}{u'_{n+1}}$ den von $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ nicht mehr überschreiten, so hat man nur:

$$(48) \qquad \sigma' + \eta \leqq \sigma - \varepsilon \text{ i. e. } \sigma' \leqq \sigma - (\varepsilon + \eta)$$

zu wählen. Dies gilt im besonderen auch für $\sigma = +\infty$.

Wie nahe sich nun auch — in besonders ungünstigen Fällen — der gegebene Wert $\sigma (> 1)$ an der Einheit befinden möge, so lassen sich doch ε, η stets so klein annehmen, dass gemäss (48) auch σ' noch > 1 ausfällt. Damit ist aber die vorgelegte Reihe der u unter eine konvergente hyperharmonische Reihe heruntergedrückt.

Entsprechend lässt sich im Falle $\sigma < 1$, auch wenn im besonderen $\sigma = -\infty$, eine divergente hyperharmonische Reihe (mit $\sigma' < 1$) konstruieren, die schwächer divergiert, als die vorgelegte Reihe. Damit ist das von Raabe herrührende Konvergenz- resp. Divergenzkriterium zweiter Art hergeleitet.

(II.) „Wenn für eine Reihe mit positiven Gliedern u_n $\lim\limits_{n=\infty}{}^{*)} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\sigma$, so konvergiert oder divergiert die Reihe, jenachdem $\sigma>1$ resp. $\sigma<1$ ist."

Das Cauchysche Kriterium (I.) ist in (II.) als besonderer Fall enthalten. Denn wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n}<g\,(<1)$ ist, so wird umgekehrt $\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{1}{g}\,(>1)$, mithin $\lim\limits_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=+\infty$. Entsprechend kommt, falls $\frac{u_{n+1}}{u_n}>g\,(>1)$,

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=-\infty.$$

Im Grenzfalle $\frac{u_n}{u_{n+1}}=1$ ist, wie hoch man n auch wählen möge $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=0$.

Im Falle $\sigma>1$, also der Konvergenz auf Grund von (II.), lässt sich wiederum der Fehler abschätzen, der entsteht, wenn die Reihe hinter einem Gliede $u_{\nu-1}$ abgebrochen wird. Sei ν bereits so gross gedacht, dass von da ab (47) erfüllt ist, so hat man nach (27) für den Rest:

$$R_{\nu,\,p}\leqq\frac{u_\nu}{u'_\nu}R'_\nu, \tag{27}$$

wo rechterhand für R'_ν der in (29) angegebene Fehler der hyperharmonischen Reihe für den Wert $\sigma=\sigma'$ einzusetzen ist.

Im Grenzfalle $\sigma=1$ versagt zunächst das Raabesche Kriterium; wird aber im besonderen der Grenzwert 1 von $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ von unten her erreicht, so lässt sich noch die Divergenz der Reihe erweisen. Denn gesetzt es sei, wenigstens von einem gewissen $n=\nu$ an, stets:

*) Der Begriff des limes lässt sich hier, wie im Folgenden, in erweitertem Sinne auffassen. Es ist für die Konvergenz nicht erforderlich, dass in (II.) der Ausdruck $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ für $\lim n=\infty$ *einen bestimmten* Grenzwert besitze, es genügt, wenn der Ausdruck für jedes, noch so hohe n, $\geqq\sigma$ ist. (Und entsprechend für die Diverg- er $\leqq\sigma$ ist.)

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leqq 1 \quad \text{i. e.} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}}\leqq 1+\frac{1}{n},$$

so hätte man:

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\geqq\frac{\nu}{\nu+1},\ \frac{u_{\nu+2}}{u_{\nu+1}}\geqq\frac{\nu+1}{\nu+2},\ \ldots,\ \frac{u_{\nu+p-1}}{u_{\nu+p-2}}\geqq\frac{\nu+p-2}{\nu+p-1},$$

also auch mittels successiver Multiplikation:

$$u_{\nu+1}\geqq u_\nu\frac{\nu}{\nu+1},\ u_{\nu+2}\geqq u_\nu\frac{\nu}{\nu+2},\ \ldots,$$

$$u_{\nu+p-1}\geqq u_\nu\frac{\nu}{\nu+p-1},$$

somit durch Addition für den Rest:

$$R_{\nu,p}\geqq\nu u_\nu\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\cdots+\frac{1}{\nu+p-1}\right),$$

woraus $\lim\limits_{p=\infty} R_{\nu,p}=\infty$ folgt. Demnach gilt als Zusatz von (II.):

(IIa.) „Im Grenzfalle $\sigma=1=\lim\limits_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ divergiert die Reihe der u, falls dieser Grenzwert 1 von unten her erreicht wird."

Dagegen versagt das Kriterium, wenn der Grenzwert 1 von oben her erreicht wird, oder auch, wenn $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$, von einem gewissen n an, um den Wert 1 stets hin und her schwankt.

Das Raabesche Kriterium (II.) möge durch einfache Beispiele illustriert werden.

Das erste Beispiel sei die oben, (34), direkt als konvergent nachgewiesene Reihe:

$$(34)\qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,n}+\frac{1}{n\,(n+1)}+\cdots$$

Hier ist:

$$u_n=\frac{1}{n\,(n+1)},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\,(n+2)},$$

also:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n+2}{n},\quad \frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{2}{n},$$

somit:

$$lim\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=2.$$

Der nämliche Grenzwert $\sigma = 2$ ergiebt sich, wie leicht zu sehen, für die etwas allgemeinere Reihe:

$$\frac{1}{a(a+h)} + \frac{1}{(a+h)(a+2h)} + \cdots + \frac{1}{\{a+(n-1)h\}(a+nh)} + \ldots (h>0). \tag{34'}$$

Zweitens sei die für $\arcsin x$ in § 20 (VII.), S. 304 erhaltene Reihe für den dort ausgeschlossenen Fall $x = 1$*) als selbständige Reihe vorgelegt:

$$1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots \tag{49}$$

Hier ist:

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1},\quad u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1},$$

also:

---

*) Die Konvergenz dieser Reihe, zugleich mit ihrem Werte $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, lässt sich auch im Anschluss an die dortigen Entwickelungen nachweisen, wenn man noch einige Ergänzungen hinzufügt. Zunächst ist die Gültigkeit der Taylorschen Entwickelung mit dem Cauchyschen Restgliede (§ 19 III, S. 258) durchaus nicht auf natürliche p beschränkt: p kann vielmehr irgend ein gegebener Wert zwischen 0 und n sein. Ferner gilt jene Entwickelung auch dann noch, wenn alle Ableitungen von $f(x)$ für die obere Grenze $x = b$ unendlich gross werden — vorausgesetzt, dass die Produkte $(b-x)f'(x)$, $(b-x)^2 f''(x)$ u. s. w. für $x = b$ verschwinden, wie das für $f(x) = \arcsin x$ der Fall ist. Denn die Hilfsfunktion $\chi_n(x)$ (13'), S. 257, verschwindet dann nach wie vor für $x = a$ und $x = b$, und es lässt sich auf sie das Rollesche Theorem anwenden. Nimmt man nun in der Formel (74) S. 306 $p = \frac{1}{2}$ und setzt $x = 1$, so ergiebt sich sofort, dass das Restglied R_{2n+1} für jeden Wert von n zwischen 0 und 1 bleibt. Da nun die positiven Glieder u der Entwickelung für:

$$\arcsin 1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

unbegrenzt abnehmen und der Wert von $s_n = u_1 + \ldots + u_n$ endlich bleibt, so ist auch nach Satz (E.) S. 325 $\lim (R_{2n+1} - R_{2n+p+1}) = 0$, d. h. $\lim\limits_{n=\infty} R_{2n+1}$ ist ein bestimmter endlicher Grenzwert g. Dieser Grenzwert g muss aber Null sein, da $\arcsin x$, wie auch die ganze Funktion $s_n(x)$, das Aggregat der ersten n Glieder in der Entwickelung von $\arcsin x$, auch noch für $x = 1$ stetig sind.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}=\frac{4n^2+2n}{4n^2-4n+1},$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{6n-1}{4n^2-4n+1},$$

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{6n^2-n}{4n^2-4n+1}=\frac{6-\frac{1}{n}}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}},$$

somit $\lim\limits_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{3}{2}$:

„Die aus der $\arcsin x$-Reihe für $x=1$ hervorgehende Reihe konvergiert."

Drittens betrachte man die aus der binomischen Reihe mit negativem x (33) für $|x|=1$ hervorgehende:

$$1-m_1+m_2-m_3+-\ldots \tag{33'}$$

als selbständige Reihe.

Von einem gewissen n an werden die m_n alternierend, so dass die Reihe (33') von da ab nur positive oder nur negative Glieder aufweist. Offenbar genügt die Betrachtung des ersteren Falles. Hier wird:

$$\text{(50)}\quad \begin{cases} \dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{n+1}{n-m}\ (n>m), & \dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1=\dfrac{m+1}{n-m}, \\ n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\dfrac{m+1}{1-\frac{m}{n}}, & \lim\limits_{n=\infty} n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=m+1: \end{cases}$$

„Die aus der binomischen Reihe bei negativem x (33) für $|x|=1$ hervorgehende Reihe konvergiert für $m+1>1$ i. e. $m>0$, divergiert für $m+1<1$ i. e. $m<0$."

(Im Grenzfalle $m=0$ konvergiert die Reihe, da sie sich auf das erste Glied 1 zusammenzieht.)

Die Reihe (33') ist, wie (50) zeigt, ein besonderer Fall der durch die Festsetzung:

(50a) $$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+a}{n+b}$$

bestimmten Reihe. Aus (50a) folgt:

(51) $$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{a-b}{1+\frac{b}{n}}.$$

Nach (II) tritt für $a - b > 1$ Konvergenz ein, für $a - b < 1$ Divergenz. Im Grenzfalle $a - b = 1$ findet für $b > 0$ die Konvergenz von $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ gegen 1 von unten her statt, sodass die Reihe der u gemäss (IIa.) divergiert. Ist dagegen $a - b = 1$, b negativ $= -\beta\,(\beta > 0)$, so wird $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-\beta}{n+1-\beta}$, also von einem gewissen Anfangsindex $n = \nu$ an:

$$u_{\nu+i} = u_\nu \frac{\nu-\beta}{\nu-\beta+i}\,(i = 1, 2, \ldots),$$

wo u_ν noch beliebig (positiv) gewählt werden kann. Mithin ergiebt sich für den Rest $R_{\nu,p}$ der Reihe:

$$R_{\nu,p} = u_\nu(\nu-\beta)\left\{\frac{1}{\nu-\beta} + \frac{1}{\nu-\beta+1} + \ldots + \frac{1}{\nu-\beta+p-1}\right\}.$$

Ist β eine natürliche Zahl inkl. 0, so fällt (sc. für $\nu > \beta$) der Ausdruck $\{\}$ innerhalb der geschweiften Klammer direkt mit dem Rest der harmonischen Reihe (22) zusammen; ist β aber nicht selbst eine natürliche Zahl, sondern zwischen den natürlichen Zahlen m und $m+1$ enthalten, so hat man $\frac{1}{\nu-\beta} > \frac{1}{\nu-m}$ und der Ausdruck $\{\}$ überschreitet den Rest der harmonischen Reihe.

Somit divergiert die Reihe der u (50a) für $a - b = 1$, gleichgültig welchen Wert b hat — ausgeschlossen den singulären Fall $u_\nu = 0$, (der für die Reihe (33) in dem Spezialfalle $m = 0$ [und $\nu = 1$] verwirklicht war), wo natürlich Konvergenz stattfindet —. Der Fall $a - b = 1$, $b = -\beta$ $(\beta > 0)$ führt zu einer Ergänzung des Kriteriums (IIa). Es wird hier nach (51):

...Gauss aufgestellte Kriterium zweiter

...t in einer Reihe mit positiven
...der Quotient $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ zweier kon-
...Glieder als rationale Funktion
... festem Grade und mit festen
...en darstellbar:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots}{n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots},$$

...rgiert die Reihe der u für $a_1 - b_1 > 1$,
...rgiert für $a_1 - b_1 \leqq 1$."

...mm (55) resp. (59) weist bereits auf eine
...Verallgemeinerung hin.
...Behuf wird man das Verfahren, nach dem die
...harmonischen Reihe (22) (S. 325), die Kon-
...us ihr erzeugten hyperharmonischen Reihe (37)
...hlossen wurde, sowie den Prozess dieser Er-
...gnet verallgemeinern.
...gliche, von Jak. Bernoulli herrührende, von
...weiter ausgeführte Beweisschema für die Reihen
...(37) benutzte die Zerlegung der Glieder einer
...in gewisse Gruppen, die durch die successiven
...von 2 reguliert wurden, und beruhte im übrigen
...dass die positiven Grössen u_n (wenigstens von einer
...n Stelle an) niemals zunehmen und mit wachsendem n
...Null konvergieren.
...Um das Konvergenz- resp. Divergenzschema auf die
...en einer beliebigen natürlichen Zahl k zu übertragen,
... man, falls etwa vom Anfangsgliede u_1 an, stets
$u_n > u_{n+1}$, und $\lim u_n = 0$, nach dem Vorbilde der S. 334,
...Rücksicht darauf, dass die Anzahl der Zahlen

$$k^\nu, k^\nu + 1, \ldots k^{\nu+1} - 1 \; (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

...ich $k^{\nu+1} - k^\nu = k^\nu(k-1)$ ist, das System der
...en auf:

mit wachsendem n der Einheit von unten her unbegrenzt nähert, so divergiert die Reihe der u."

Die durch (50) bestimmte Reihe ist wiederum ein besonderer Fall der häufig vorkommenden allgemeineren, wo $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ eine rationale Funktion von n bestimmten Grades und mit festen Koeffizienten ist:

$$(56) \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ldots + a_k}{n^k + b_1 n^{k-1} + b_2 n^{k-2} + \ldots + b_k}.$$

Hier sind bereits die Koeffizienten von n^k in Zähler und Nenner als gleich angenommen worden, da andernfalls $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} \gtrless 1$ und somit die Konvergenz resp. die Divergenz der Reihe der u bereits durch das Cauchysche Kriterium (I.) entschieden würde.

Aus (56) folgt:

$$(57) \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{n^{k-1}(a_1 - b_1) + n^{k-2}(a_2 - b_2) + \ldots + (a_k - b_k)}{n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k},$$

also:

$$(58) \qquad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{(a_1 - b_1) + \frac{1}{n}(a_2 - b_2) + \ldots + \frac{1}{n^{k-1}}(a_k - b_k)}{1 + \frac{1}{n} b_1 + \ldots + \frac{1}{n^k} b_k}.$$

Der Grenzwert der rechten Seite für $\lim n = \infty$ ist $a_1 - b_1$, also tritt nach (II.) Konvergenz resp. Divergenz der u-Reihe ein, jenachdem $a_1 - b_1 \gtrless 1$ ist.

Im Übergangsfalle $a_1 - b_1 = 1$ entsteht ersichtlich:

$$(59) \qquad \lim_{n=\infty} n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = a_2 - b_2 - b_1,$$

d. h. die linke Seite hat einen festen endlichen Grenzwert, *und* die u-Reihe muss auf Grund von (IIa.) resp. (IIb.) *divergieren*.

Damit ist das von Gauss aufgestellte Kriterium zweiter
t gewonnen:

(IIc.) „Ist in einer Reihe mit positiven Gliedern u der Quotient $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ zweier konsekutiver Glieder als rationale Funktion von n von festem Grade und mit festen Koeffizienten darstellbar:

30) $$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots}{n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots},$$

so konvergiert die Reihe der u für $a_1 - b_1 > 1$, sie divergiert für $a_1 - b_1 \leqq 1$."

Das Kriterium (55) resp. (59) weist bereits auf eine eitergehende Verallgemeinerung hin.

Zu dem Behuf wird man das Verfahren, nach dem die ivergenz der harmonischen Reihe (22) (S. 325), die Konrgenz der aus ihr erzeugten hyperharmonischen Reihe (37) . 334), erschlossen wurde, sowie den Prozess dieser Erugung geeignet verallgemeinern.

Das fragliche, von Jak. Bernoulli herrührende, von auchy weiter ausgeführte Beweisschema für die Reihen 2) und (37) benutzte die Zerlegung der Glieder einer eihe (2) in gewisse Gruppen, die durch die successiven otenzen von 2 reguliert wurden, und beruhte im übrigen rauf, dass die positiven Grössen u_n (wenigstens von einer wissen Stelle an) niemals zunehmen und mit wachsendem n gen Null konvergieren.

Um das Konvergenz- resp. Divergenzschema auf die otenzen einer beliebigen natürlichen Zahl k zu übertragen, elle man, falls etwa vom Anfangsgliede u_1 an, stets $\geqq u_{n+1}$, und lim $u_n = 0$, nach dem Vorbilde der S. 334, it Rücksicht darauf, dass die Anzahl der Zahlen

$$k^\nu, k^\nu + 1, \ldots k^{\nu+1} - 1 \; (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

fenbar gleich $k^{\nu+1} - k^\nu = k^\nu(k-1)$ ist, das System der *ngleichungen auf:*

$$(61)\quad \begin{cases} u_1 + u_2 + \ldots u_{k-1} \leqq (k-1)u_1 \\ u_k + u_{k+1} + \ldots u_{k^2-1} \leqq k(k-1)u_k \\ u_{k^2} + u_{k^2+1} + \ldots u_{k^3-1} \leqq k^2(k-1)u_{k^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{k^\nu} + u_{k^\nu+1} + \ldots u_{k^{\nu+1}-1} \leqq k^\nu(k-1)u_{k^\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

woraus durch Addition folgt:

$$(62)\quad u_1 + u_2 + \ldots + u_{k^{\nu+1}-1} \leqq (k-1)[1 \cdot u_1 + k u_k + k^2 u_{k^2} + \ldots + k^\nu u_{k^\nu}].$$

Da andererseits auch die Anzahl der Zahlen $k^\nu + 1$, $k^\nu + 2, \ldots, k^{\nu+1}$ gleich $k^\nu(k-1)$ ist, so gelangt man nach dem Vorbilde der S. 325 zu einem zweiten System von Ungleichungen:

$$(61')\quad \begin{cases} u_2 + u_3 + \ldots + u_k \geqq (k-1)u_k \\ u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k^2} \geqq k(k-1)u_{k^2} \\ u_{k^2+1} + u_{k^2+2} + \ldots + u_{k^3} \geqq k^2(k-1)u_{k^3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{k^\nu+1} + u_{k^\nu+2} + \ldots + u_{k^{\nu+1}} \geqq k^\nu(k-1)u_{k^{\nu+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

und hieraus durch Multiplikation mit k und Addition, wenn man noch die Ungleichung:

$$k u_1 > (k-1)u_1$$

hinzufügt:

$$(62')\quad k(u_1 + u_2 + \ldots + u_{k^\nu}) > (k-1)[1 \cdot u_1 + k u_k + k^2 u_{k^2} + \ldots + k^\nu u_{k^\nu}].$$

Auf Grund von (62) und (62′) ergiebt sich der Satz:

(L.) „Wenn für eine unendliche Reihe positiver Grössen u_n, von einem gewissen Anfangsgliede an, stets $u_{n+1} \leqq u_n$, und zudem $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ ist, so konvergiert resp. diver-

giert die Reihe der u immer zugleich mit der Reihe:

$$1 \cdot u_1 + k u_k + k^2 u_{k^2} + \ldots + k^\nu u_{k^\nu} + \ldots \quad (k = 2, 3, \ldots,)."$$

Nunmehr werde das Verfahren der S. 334, aus der genten harmonischen Reihe (22) durch einen geeigneten nzierungsprozess eine konvergente hyperharmonische e (37) zu erzeugen, auf die divergente Cauchysche e (S. 326):

$$u_n = \frac{1}{n\,ln}$$

wandt. Es erweist sich als zweckmässig, die neue e so zu bilden, dass:

$$u_n = \frac{1}{n(ln)^\sigma}$$

, wo $\sigma > 1$. Konstruiert man die Vergleichsreihe (63) $c = 2$, so kommt:

$$2^\nu u_{2^\nu} = \frac{1}{(l\,2^\nu)^\sigma} = \frac{1}{(\nu\,l\,2)^\sigma} = \frac{1}{(l\,2)^\sigma} \cdot \frac{1}{\nu^\sigma};$$

t konvergiert die vorgelegte Reihe (64), da es die mit multiplizierte hyperharmonische Reihe $1 + \frac{1}{2^\sigma} + \ldots$

$+ \ldots$ thut.

Für $\sigma = 1$ (S. 326) und a fortiori für $\sigma < 1$ divergiert Reihe (64):

(M.) „Die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2(l2)^\sigma} + \frac{1}{3(l3)^\sigma} + \ldots + \frac{1}{n(ln)^\sigma} + \ldots$$

konvergiert für $\sigma > 1$, divergiert für $\sigma \leqq 1$."

Umsomehr würde also die Reihe $u_n = \frac{1}{(n\,ln)^\sigma}$ für $\sigma > 1$ ergieren, für $\sigma \leqq 1$ divergieren.

Um jetzt eine Reihe, für die das Raabesche Kriterium (II.) versagt, mit einer Reihe (64) bequem zu vergleichen, gehe man wie bei der hyperharmonischen (S. 335) vor. Man hat für die Reihe (64), wo wiederum $\sigma > 1$ sei, successive:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left\{\frac{l(n+1)}{l\,n}\right\}^\sigma,$$

also, da $l(n+1) - l(n) = l\left(1+\frac{1}{n}\right)$:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1 + \frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{l\,n}\right\}^\sigma - 1,$$

mithin, da gemäss S. 326: $l\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 &< \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n\,l\,n}\right)^\sigma - 1 \\ &< \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\sigma}{n\,l\,n} + \frac{\pi_n}{(n\,l\,n)^2}\right) - 1,\end{aligned}$$

wo π_n eine positive Grösse ist, die auf Grund von § 20 (V) S. 285, mit wachsendem n gegen die endliche positive Grösse $\pi = \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}$ konvergiert.

Aus der letzten Ungleichung fliesst unmittelbar die zu (42) S. 335 analoge Grenzgleichung:

$$\lim_{n=\infty} l\,n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \sigma, \tag{66}$$

wo überdies der Grenzwert $\sigma\,(>1)$ von oben her erreicht wird. Eine unbedeutende Abänderung des Beweises führt zu der nämlichen Grenzgleichung (66) auch für $\sigma \leqq 1$. Es gilt also:

(N.) „Der Reihe: $u_n = \frac{1}{n(ln)^\sigma}$ kommt für jedes gegebene $\sigma \left(\gtreqless 1\right)$ die Eigenschaft zu:

$$\lim_{n=\infty} ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \sigma, \tag{66}$$

wobei für $\sigma > 1$ die Konvergenz der linken Seite gegen σ von oben her stattfindet."

Die Ergebnisse (M.), (N.) sollen nun auf die höheren, nach S. 326 divergierenden Reihen:

$$u_n = \frac{1}{n ln l_2 n}, \quad u_n = \frac{1}{n ln l_2 n l_3 n} \cdots, \tag{67}$$
$$u_n = \frac{1}{n ln l_2 n \ldots l_i n},$$

wo $l_i n$ die durch i-malige Logarithmierung aus n hervorgehende Grösse bezeichnet, übertragen werden. Man bilde die von Bertrand untersuchte Reihe, die daher als Bertrandsche bezeichnet sei:

$$u_n = \frac{1}{n ln l_2 n \ldots l_{i-1} n (l_i n)^\sigma} = \frac{1}{L_{i-1}(n)} \cdot \frac{1}{(l_i n)^\sigma}, \tag{64a}$$

wo das Produkt $n ln l_2 n \ldots l_{i-1} n$ zur Abkürzung mit $L_{i-1}(n)$ bezeichnet, und zunächst wieder $\sigma > 1$ sei. Da deren Konvergenz für $i = 0, 1$ bereits feststeht, nehme man an, sie sei für irgend einen Index i gültig: sie soll dann für den nächstfolgenden Index $i + 1$, also für die Reihe:

$$u_n = \frac{1}{n ln l_2 n \ldots l_i n \{l_{i+1}(n)\}^\sigma} \; (\sigma > 1) = \frac{1}{L_i(n)\, l_{i+1}^\sigma(n)}$$

bewiesen werden. Auf Grund von (L.) ziehe man die Vergleichsreihe der v_ν heran:

$$v_\nu = k^\nu u_{k^\nu} \; (k = 2, 3, \ldots).$$

Nun geht aus der Definition von $l_k n$ hervor, dass:

$$l(k^\nu) = \nu\, l k, \quad l_2(k^\nu) = l\{\nu\, l k\}, \ldots l_i(k^\nu) = l_{i-1}\{\nu\, l k\}, \tag{68}$$
$$l_{i+1}(k^\nu) = l_i\{\nu\, l k\}.$$

Für $k \geqq 3$ wird $lk > 1$, somit auch $\nu l 3 > \nu$, wodurch die Gleichungen (68) in die Ungleichungen übergehen:

(68′) $l(3^\nu) > \nu$, $l_2(3^\nu) > l\nu, \ldots, l_i(3^\nu) > l_{i-1}\nu$, $l_{i+1}(3^\nu) > l_i\nu$,

und da aus der letzten derselben noch

$$\{l_{i+1}(3^\nu)\}^\sigma > (l_i\nu)^\sigma \quad (\sigma > 1)$$

folgt, so erhält man durch Multiplikation dieser Ungleichungen für die Vergleichsreihe: $v_\nu = 3^\nu u_{3^\nu}$:

$$(69) \qquad v_\nu = 3^\nu u_{3^\nu} = \frac{1}{l(3^\nu)\, l_2(3^\nu) \ldots l_i(3^\nu)\{l_{i+1}(3^\nu)\}^\sigma} < \frac{1}{\nu \cdot l\nu \cdot l_2\nu \ldots l_{i-1}\nu (l_i\nu)^\sigma} \text{ i. e. } < \frac{1}{L_{i-1}(\nu)} \cdot \frac{1}{(l_i\nu)^\sigma};$$

da die rechts stehende Grösse das allgemeine Glied einer nach Voraussetzung konvergenten Reihe bildet, so konvergiert auch die Reihe der v_ν, und damit gemäss (L.) auch die der u_n. Für $\sigma = 1$ aber divergiert die Reihe der u (64a), nach S. 326, also um so mehr für $\sigma < 1$. Demnach stellen die Sätze (J.) und (M.), S. 335 und 348, die beiden ersten Stufen ($i = 0, 1$*) des allgemeineren Satzes dar:

(M′.) Die Bertrandsche Reihe:**)

$$(64a) \qquad u_n = \frac{1}{n\, ln\, l_2 n \ldots l_{i-1} n (l_i n)^\sigma} = \frac{1}{L_{i-1}(n)(l_i n)^\sigma},$$

wo $l_i n$ den i-mal iterierten natürlichen Logarithmus von n bedeutet, konvergiert für $\sigma > 1$, divergiert für $\sigma \leqq 1$.“

*) Dabei sind unter $l_0 n$, $l_1 n$ die respektiven Grössen n, l zu verstehen.

**) Der Satz (M′) lässt sich auch geometrisch einsehen. Indem wir uns hier auf den Fall $i = 0$ d. i. die hyperharmonische Reihe $u_n = \frac{1}{n^\sigma}$ ($\sigma > 1$) beschränken, verfahren wir wie in § 8 und denken uns in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Kurve $y = x^{-\sigma}$ vorgelegt, sowie über jeder Strecke $(k, k+1)$ ($k = 1, 2, \ldots n, \ldots$) der Abscissenachse mit Hilfe von Parallelen zu den beiden Achsen zwei Rechtecke, von denen das eine kleiner, das andere grösser ist, als der über $(k, k+1)$ stehende Flächenstreifen. Die Summe der zu kleinen Rechtecke über den Strecken (1, 2) (2, 3), . . .,

Nunmehr handelt es sich noch um die Übertragung der Sätze (K.), (N.), S. 336 u. 349, auf die Bertrandsche Reihe (64a). Es wird für letztere:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{l(n+1)}{ln} \cdot \frac{l_2(n+1)}{l_2 n} \cdots \frac{l_{i-1}(n+1)}{l_{i-1} n} \cdot \left\{\frac{l_i(n+1)}{l_i n}\right\}^\sigma$$

$$(70) \quad = \frac{L_{i-1}(n+1)}{L_{i-1}(n)} \cdot \left\{\frac{l_i(n+1)}{l_i n}\right\}^\sigma.$$

$(n-1, n)$ ist $\frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \ldots + \frac{1}{n^\sigma} = s_n - 1$, die Summe der zu grossen: $1 + \frac{1}{2^\sigma} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\sigma} = s_n - \frac{1}{n^\sigma}$, während die über der ganzen Strecke $(1, n)$ stehende Fläche gemäss § 3 (38) S. 26 den Inhalt $J_1^n = \left(1 - \frac{1}{n^r}\right)\frac{1}{r}$ besitzt, wo $r = \sigma - 1$.

Mithin ist $s_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{n^r}\right)\frac{1}{r} < 1 + \frac{1}{r}$, andererseits $s_n > \frac{1}{n^\sigma} + \left(1 - \frac{1}{n^r}\right)\frac{1}{r}$, also bei hinreichend grossem n auch $> \frac{1}{r}$. Somit ist die Summe $s_n = 1 + \frac{1}{2^\sigma} + \ldots + \frac{1}{n^\sigma}$, wie gross auch n sei, zwischen den Grenzen $\frac{1}{r}$ und $1 + \frac{1}{r}$ enthalten, es konvergiert demnach die hyperharmonische Reihe für $\sigma > 1$ i. e. $r > 0$, und divergiert, wenn man r gegen Null d. i. σ gegen Eins abnehmen lässt. Hieraus fliesst noch der für die Zahlentheorie wichtige Satz, dass $\lim_{r=0,\ n=\infty} r s_n = 1$ wird. Das Entsprechende gilt für die etwas allgemeinere Reihe: $u_n = \frac{1}{(a+nh)^\sigma}$, $a > 0$, $h > 0$, nur dass hier $\lim_{r=0,\ n=\infty} r s_n = \frac{1}{h}$ wird.

Für die Bertrandsche Reihe (64a) hätte man die Kurve

$$y = \frac{1}{x\, lx\, l_2 x \ldots l_{i-1} x (l_i x)^\sigma}$$

zu Grunde zu legen und von einer Abscisse a — wo a eine natürliche Zahl, für die $l_i a$ positiv ausfällt — beginnend, zu verfahren wie oben. Auf Grund eines Satzes der Integralrechnung (s. den Abschnitt III) hat, da $\frac{1}{x\, lx \ldots l_{i-1} x (l_i x)^\sigma} = \left\{-\frac{1}{r(l_i x)^r}\right\}'$, die über der Abscissenachsenstrecke (a, n) stehende Fläche den Inhalt:

$$J_a^n = \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{(l_i a)^r} - \frac{1}{(l_i n)^r}\right\}.$$

Hier wird der Reihe nach:

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

$$\frac{l(n+1)}{ln} = 1 + \frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ln},$$

oder, da nach dem Mittelwertsatz:

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{\vartheta}{n}}\,(0<\vartheta<1) = \frac{r_n^{(1)}}{n}, \quad \lim_{n=\infty} r_n^{(1)} = 1,$$

so wird:

$$\frac{l(n+1)}{ln} = 1 + \frac{r_n^{(1)}}{n\,ln}, \quad \lim r_n^{(1)} = 1.$$

Hieraus geht wieder hervor, dass:

$$\frac{l_2(n+1)}{l_2 n} = 1 + \frac{l\frac{l(n+1)}{ln}}{l_2 n} = 1 + \frac{1}{l_2 n} l\left(1 + \frac{r_n^{(1)}}{n\,ln}\right)$$

$$= 1 + \frac{r_n^{(2)}}{n\,ln\,l_2 n}, \quad \lim r_n^{(2)} = 1.$$

Allgemein wird also sein:

$$(71) \quad \frac{l_k(n+1)}{l_k n} = 1 + \frac{r_n^{(k)}}{n\,ln\,l_2 n \ldots l_k n} = 1 + \frac{r_n^{(k)}}{L_k(n)}, \quad \lim r_n^{(k)} =$$

Damit wird aber, da die Kurve von $x = a$ an ständig abnimmt, d
Summe s_n der Reihe (64a) von $\frac{1}{a\,la \ldots l_{i-1}a\,(l_i a)^\sigma}$ bis inklusi
$\frac{1}{n\,ln \ldots l_{i-1}n(l_i n)^\sigma}$ zwischen den beiden Grenzen eingeschlossen:

$$\frac{1}{r\,(l_i a)^r} < s_n < \frac{1}{a\,la \ldots l_{i-1}a\,(l_i a)^\sigma} + \frac{1}{r\,(l_i a)^r},$$

woraus wiederum die Konvergenz von (64a) für $\sigma > 1$, die Diverge
für $\lim \sigma = 1$ folgt; sowie die Grenzgleichung:

$$\lim_{r=0,\ n=\infty} r s_n = 1.$$

In der That, sei (71) für den Index k gültig, so kommt für den Index $k+1$:

$$\frac{l_{k+1}(n+1)}{l_{k+1}n} = 1 + \frac{1}{l_{k+1}n}\, l\left\{\frac{l_k(n+1)}{l_k n}\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{l_{k+1}n}\, l\left(1 + \frac{r_n^{(k)}}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_k n}\right)$$

$$= 1 + \frac{r_n^{(k+1)}}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_{k+1} n} = 1 + \frac{r_n^{(k+1)}}{L_{k+1}(n)},$$

$$\lim r_n^{(k+1)} = 1,$$

womit die Formel (71) allgemein bewiesen ist.

Wendet man (71) auf den letzten Faktor des Produktes (70) an, so kommt:

$$\left\{\frac{l_i(n+1)}{l_i n}\right\}^{\sigma} = \left(1 + \frac{r_n^{(i)}}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_i n}\right)^{\sigma}, \quad \lim r_n^{(i)} = 1,$$

also auch, wenn man wie auf S. 335 verfährt:

$$(71\text{a}) \quad \left\{\frac{l_i(n+1)}{l_i n}\right\}^{\sigma} = 1 + \frac{\sigma_n}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_i n} = 1 + \frac{\sigma_n}{L_i(n)}, \quad \lim \sigma_n = \sigma.$$

Mit Hilfe der Umformungen (71), (71a) geht (70) über in:

$$(70') \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{r_n^{(1)}}{n\, l n}\right)\left(1 + \frac{r_n^{(2)}}{n\, l n\, l_2 n}\right) \ldots$$

$$\left(1 + \frac{r_n^{(i-1)}}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_{i-1} n}\right)\left(1 + \frac{\sigma_n}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_i n}\right)$$

$$= \left\{1 + \frac{1}{L_0(n)}\right\}\left\{1 + \frac{r_n^{(1)}}{L_1(n)}\right\}\left\{1 + \frac{r_n^{(2)}}{L_2(n)}\right\} \ldots$$

$$\left\{1 + \frac{r_n^{(i-1)}}{L_{i-1}(n)}\right\}\left\{1 + \frac{\sigma_n}{L_i(n)}\right\},$$

$$\lim_{n=\infty} r_n^{(k)} = 1 \ (k = 1, 2, \ldots, i-1), \quad \lim_{n=\infty} \sigma_n = \sigma.$$

Die Ausführung der rechten Seite von (70') liefert eine *Entwickelung* von der Gestalt:

$$(72)\quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{r_n^{(1)}}{n\,ln} + \frac{r_n^{(2)}}{n\,ln\,l_2 n} + \cdots + \frac{r_n^{(i-1)}}{n\,ln \ldots l_{i-1} n} + \frac{\sigma_n}{n\,ln\,l_2 n \ldots l_i n} + \frac{1}{n^2\,ln} P_n,$$

$$\lim P_n = \lim r_n^{(1)} = 1,$$

$$\lim r_n^{(k)} = 1\,(k = 1, 2, \ldots (i-1)),\quad \lim \sigma_n = \sigma,$$

wo der mit P_n bezeichnete Restfaktor ein Aggregat von Gliedern ist, deren erstes $r_n^{(1)}$ lautet, während die Summe der übrigen mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

Bedient man sich zur Abkürzung der Bezeichnung:

$$(73)\quad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = U_0,\quad ln(U_0 - 1) = U_1,$$
$$l_2 n(U_1 - 1) = U_2, \ldots, l_{in}(U_{i-1} - 1) = U_i,$$

so stellt $U_i\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = U_i$ ersichtlich die Verallgemeinerung der durch die linken Seiten von (44), (66), S. 336 u. 349, angegebenen Prozesse dar. Die Ausübung des Prozesses U_i auf die rechte Seite von (72) ergiebt nach leichter Rechnung:

$$U_i = (r_n^{(1)} - 1)\,l_2 n \ldots l_i n + (r_n^{(2)} - 1)\,l_3 n \ldots l_i n + \cdots$$

$$(74)\quad + r_n^{(i-1)}\,l_i n + \sigma_n + \frac{l_2 n \ldots l_i n}{n} P_n,$$

$$\lim P_n = 1,\ \lim r_n^{(k)} = 1,\ \lim \sigma_n = \sigma.$$

Hier aber lässt sich zeigen, dass $r_n^{(k)} - 1$ $(k = 1, 2, \ldots, i-1)$ mit wachsendem n unendlich klein wird, wie $\frac{1}{n}$ d. h. dass $\lim n(r_n^{(k)} - 1)$ einen festen, endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert hat, sowie, dass $\lim \frac{l_2 n \ldots l_i n}{n}$, und um so mehr $\frac{l_3 n \ldots l_i n}{n}, \ldots, \frac{l_i n}{n}$ den Grenzwert Null besitzen: damit aber wäre die gewünschte Verallgemeinerung der Sätze (K.), (N.), S. 336 u. 349, dass $\lim_{n=\infty} U_i = \sigma$, völlig erwiesen.

Nun ist, was den zweiten der beiden fraglichen Punkte angeht:

$$\frac{l_2 n \dots l_i n}{n} < \frac{(ln)^{i-1}}{n} < \left\{\frac{ln}{\frac{1}{n^{i-1}}}\right\}^{i-1};$$

da hier der Exponent von n eine positive feste Grösse ist, so hat $\frac{ln}{\frac{1}{n^{i-1}}}$ auf Grund von § 17 (15b), S. 220 den Grenzwert Null.

Um andererseits den Grenzwert von $n(r_n^{(k)} - 1)$ zu ermitteln, ziehe man den einmal erweiterten Mittelwertsatz (§ 19) für den natürlichen Logarithmus heran. Danach hat man, wenn unter ε eine von n abhängige Grösse zwischen 0 und 1 verstanden wird, die mit wachsendem n gegen Null konvergiere:

$$(75) \qquad l(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{1+\vartheta\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon\left(1 - \frac{s}{2}\varepsilon\right) = \varepsilon r,$$

$$0 < \vartheta < 1, \ \lim s = 1.$$

Ist im besonderen $\lim \varepsilon n = 1$, so wird:

$$\lim n(r-1) = -\frac{1}{2}.$$

Wendet man diese Hilfsformel zuvörderst auf den Fall $\varepsilon = \frac{1}{n}$ an, so kommt mit Rücksicht auf (71) für $k = 1$:

$$(76) \qquad \frac{l(n+1)}{ln} = 1 + \frac{r_n^{(1)}}{nln} = 1 + \frac{1}{nln}\left(1 - \frac{s_n}{2}\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim s_n = 1, \ \lim n(r_n^{(1)} - 1) = -\frac{1}{2}.$$

Allgemein gilt für einen beliebigen Index k nach (71):

$$(71) \qquad \frac{l_k(n+1)}{l_k n} = 1 + \frac{r_n^{(k)}}{nln\, l_2 n \dots l_k n} = 1 + \frac{r_n^{(k)}}{L_k(n)},$$

$$\lim_{n=\infty} r_n^{(k)} = 1.$$

Dann liefert der Übergang zum nächstfolgenden Index $k+1$ mit Benutzung von (71), (75):

$$\frac{l_{k+1}(n+1)}{l_{k+1}n} = 1+\frac{1}{l_{k+1}n}\,l\frac{l_k(n+1)}{l_kn} = 1+\frac{1}{l_{k+1}n}\,l\left\{1+\frac{r_n^{(k)}}{n\,l\,n\ldots l_kn}\right\}$$

$$= 1+\frac{r_n^{(k)}}{n\,l\,n\,\ldots\,l_{k+1}n}\left\{1-\frac{s_n^{(k)}r_n^{(k)}}{2n\,l\,n\ldots l_kn}\right\},\ \lim s_n^{(k)}=1$$

$$= 1+\frac{r_n^{(k+1}}{n\,l\,n\,\ldots\,l_{k+1}n} = 1+\frac{r_n^{(k+1)}}{L_{(k+1)}(n)}.$$

Somit besteht zwischen $r_n^{(k+1)}$ und $r_n^{(k)}$ der Zusammenhang:

$$r_n^{(k+1)} = r_n^{(k)} - \frac{s_n^{(k)}\left(r_n^{(k)}\right)^2}{2n\,l\,n\,\ldots\,l_k\,n}\quad\begin{cases}\lim r_n^{(k)}=1,\\ \lim s_n^{(k)}=1,\end{cases}$$

oder auch:

$$n(r_n^{(k+1)}-1) = n(r_n^{(k)}-1) - \frac{s_n^{(k)}\left(r_n^{(k)}\right)^2}{2\,l\,n\,\ldots\,l_k\,n}\begin{cases}\lim r_n^{(k)}=1,\\ \lim s_n^{(k)}=1,\end{cases}$$

woraus folgt:

$$\lim_{n=\infty} n(r_n^{(k+1)}-1) = \lim_{n=\infty} n(r_n^{(k)}-1).$$

Da aber für $k=1$ gemäss (76) der Grenzwert $-\frac{1}{2}$ resultiert, so ist allgemein, was zu beweisen war:

$$\lim_{n=\infty} n(r_n^{(k)}-1) = -\frac{1}{2}. \tag{77}$$

Hiermit ist die gesuchte Verallgemeinerung der Sätze (K.), (N.), S. 336 u. 349, gewonnen:

(N'.) „Definiert man den Prozess:

$$U_i\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = U_i$$

durch die Kette von Prozessen:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = U_0,\quad ln(U_0-1) = U_1, \tag{73}$$

$$l_2n(U_1-1) = U_2,\ \ldots,\ l_in(U_{i-1}) = U_i,$$

so kommt der Bertrandschen Reihe:

$$u_n = \frac{1}{n \ln l_2 n \ldots l_{i-1} n (l_i n)^\sigma} = \frac{1}{L_{i-1}(n)(l_i n)^\sigma} \tag{64a}$$

für jeden gegebenen Wert von σ die Eigenschaft zu:

$$\lim_{n=\infty} U_i = \sigma.\text{“} \tag{78}$$

Mit Hilfe der Sätze (M′.), S. 350, und (N′.), ist es nunmehr möglich, nach dem Muster der für die beiden ersten Fälle $k = 0, 1$ befolgten Methode, eine vorgelegte Reihe von positiven Gliedern u_n mit einer geeigneten Bertrandschen Reihe zu vergleichen. Sobald, von einem gewissen n an, und für einen Index i $U_i\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) \geqq \sigma$, wo $\sigma > 1$, so lässt sich, wie nahe auch σ der Einheit sei, stets ein σ' zwischen 1 und σ so wählen, dass für die mit diesem σ' und dem nämlichen i gebildete Bertrandsche Reihe u_n' (64a), wiederum von einem gewissen n an, $U_i\left(\frac{u_n'}{u_{n+1}'}\right) < U_i\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ wird, damit aber auch $\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{u_n'}{u_{n+1}'}$, was gemäss (H.), S. 330, und (N′.) die Konvergenz der vorgelegten Reihe der u darthut. Entsprechend verfährt man im Falle $\sigma < 1$. Somit gilt das allgemeine „logarithmische“ Kriterium zweiter Art:

(III.) „Wird der Prozess $U_i\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ durch (73) definiert, so konvergiert oder divergiert eine Reihe von positiven Gliedern u_n, wenn, für irgend einen Index i und von einem gewissen n an, U_i stets grösser bleibt als eine angebbare Grösse $\sigma\,(>1)$ resp. stets kleiner, als eine angebbare Grösse $\sigma\,(<1)$.“

Hierbei ist zu beachten, dass wenn das Kriterium (III.) für irgend einen Index i erfüllt ist, es von selbst auch für jeden höheren Index gilt, denn für $\sigma \gtrless 1$ werden U_{i+1}, U_{i+2} . . . positiv resp. negativ unendlich, sodass gemäss (III.) die *Reihe der u* konvergiert resp. divergiert. Demnach

umfasst das Kriterium (III.) die früheren (I.), (II.), (IIa.), (IIb.), (IIc.). Auch im Übergangsfalle (59), S. 344, von (IIc.):

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1 = \frac{p_n}{n}, \quad \lim p_n \text{ endlich},$$

wird:

$$U_1 = ln\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = p_n \cdot \frac{ln}{n},$$

also $\lim U_1 = 0$, mithin divergiert die Reihe der u, wie dort angegeben.

Das Kriterium (III.) lässt sich in eine gedrängtere Gestalt bringen, wenn man direkt von der Entwickelung (72) von (70), S. 351 u. 354, ausgeht.

Sei für eine vorgelegte Reihe von Gliedern v:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \geqq \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

so erhält man unmittelbar:

$$\operatorname{im}\left[\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{(n+1)\,l(n+1)\ldots l_i(n+1)}{n\,ln\ldots l_i n}\right] \geqq \frac{\sigma - 1}{n\,ln\ldots l_i n}, \quad (\sigma > 1),$$

und da das Entsprechende bei der Voraussetzung:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \leqq \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

gilt:

$$\operatorname{im}\left[\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{(n+1)\,l(n+1)\ldots l_i(n+1)}{n\,ln\ldots l_i n}\right] \leqq \frac{\sigma - 1}{n\,ln\ldots l_i n}, \quad (\sigma < 1),$$

so hat man damit das von Bertrand aufgestellte, mit (III.) inhaltlich gleichwertige, wenn auch für Anwendungen weniger geeignete Kriterium zweiter Art:

(III′.) „Eine Reihe mit positiven Gliedern v_n konvergiert resp. divergiert, jenachdem:

$$\lim\left[L_i n \frac{v_n}{v_{n+1}} - L_i(n+1)\right] > 0 \text{ resp. } < 0.“$$

Um eine Anwendung des Kriteriums (III.) zu geben, betrachte man den Fall der hyperharmonischen Reihe:

$$u_n = \frac{1}{n^\sigma},$$

wo sich jetzt aber $\sigma = \sigma(n)$ selbst bei wachsendem n der Einheit von oben her unbegrenzt nähern möge:

$$(79) \qquad u_n = \frac{1}{n^\sigma}, \quad \sigma = 1 + \frac{1}{f(n)}, \quad \lim f(n) = +\infty.$$

Nach dem einmal erweiterten Mittelwertsatze für $(1+\varepsilon)^\sigma$, $\sigma > 1$, $0 < \varepsilon < 1$ hat man:

$$(80) \qquad \begin{aligned} (1+\varepsilon)^\sigma &= 1 + \sigma\varepsilon + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\varepsilon^2(1+\vartheta\varepsilon)^{\sigma-2} \\ &= 1 + \sigma\varepsilon\left\{1 + \frac{\sigma-1}{2}\varepsilon\varrho\right\}, \quad \lim_{\varepsilon=0} \varrho = 1. \end{aligned}$$

Im vorliegenden Falle $\varepsilon = \frac{1}{n}$ wird also:

$$(81) \qquad U_0\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \sigma\left\{1 + \frac{\sigma-1}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{n}\right\},$$
$$\lim_{n=\infty} \varrho_n = 1.$$

Da der Grenzwert $\lim_{n=\infty} U_0 = 1$ von oben her (S. 339) erreicht wird, muss man zu U_1 übergehen. Gemäss (79), (81) wird:

$$(81') \qquad U_1\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = ln(U_0 - 1) = \frac{ln}{f(n)}\left(1 + \frac{\tau_n}{2n}\right), \quad \lim \tau_n = 1.$$

Setzt man demnach:

$$(82) \qquad \frac{1}{f(n)} = \pi_n \frac{1}{ln},$$

so konvergiert oder divergiert gemäss (III.) die Reihe (79), jenachdem $\lim \pi_n \gtrless 1$ ist.

Im Übergangsfalle $\lim \pi_n = 1$ gehe man zu U_2 über:

$$(81'') \qquad U_2 = l_2 n(U_1 - 1) = l_2 n\left\{(\pi_n - 1) + \frac{\tau_n^{(2)}}{2n}\right\}, \quad \lim \tau_n^{(2)} = 1.$$

Ist im besonderen π_n konstant $= 1$, so wird $\lim U_2 = 0$,

und die Reihe (79): $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{ln}}}$ divergiert. Andernfalls setze man wiederum:

$$(82') \quad \pi_n = 1 + \frac{1}{f_2(n)}, \ \lim f_2(n) = \infty, \ \sigma = 1 + \frac{1}{ln}\left\{1 + \frac{1}{f_2(n)}\right\}$$

und U_2 nimmt die Gestalt an:

$$(81'') \qquad U_2 = \frac{l_2(n)}{f_2(n)} + \tau_n^{(2)} \frac{l_2 n}{2n}, \quad \lim \tau_n^{(2)} = 1;$$

$$\lim_{n=\infty} U_2 = \lim_{n=\infty} \frac{l_2 n}{f_2(n)}.$$

Hier wiederholen sich die an (81') geknüpften Schlüsse. Nimmt man daher mit dem Exponenten σ in (79) die zu U_i (73), S. 354, analogen, nur im Anfang um einen Schritt verkürzten Prozesse V_i vor:

$$(73') \qquad V_1(\sigma) = ln(\sigma - 1), \ V_2(\sigma) = l_2 n(V_1 - 1) \ldots,$$
$$V_i(\sigma) = l_i n(V_{i-1} - 1),$$

so hat man das Ergebnis:

(O.) „Die Reihe (79) $u_n = \frac{1}{n^\sigma}$, wo sich σ selbst mit wachsendem n der Einheit unbegrenzt von oben her nähere, konvergiert oder divergiert, jenachdem für irgend*) einen Index i $\lim\limits_{n=\infty} V_i(\sigma) > 1$ oder < 1 ausfällt."

Dies überträgt**) sich unmittelbar auf die Reihe (64a):

$$u_n = \frac{1}{n \, ln \, l_2 n \ldots (l_i n)^\sigma}.$$

*) Es giebt allerdings extreme Funktionen $\sigma(n)$, wo für jeden Index i $\lim\limits_{n=\infty} V_i(\sigma) = 1$ wird, wo also das Kriterium (O.) versagt. Das Entsprechende gilt bei den ähnlichen Kriterien.

**) Es bietet aber auch durchaus keine prinzipielle Schwierigkeit, das Kriterium (III.) auf einen erheblich komplizierteren Fall anzuwenden, wie er z. B. durch die Reihe:

$$u_n = \frac{1}{n^{\sigma_0} (ln)^{\sigma_1} (l_2 n)^{\sigma_2} \ldots (l_i n)^{\sigma_i}}$$

geboten wird, wo die Exponenten σ Funktionen von n bedeuten, die mit wachsendem n — sei es von unten, sei es von oben her — gegen 1 konvergieren. Sind im besonderen alle Exponenten σ bis auf einen beliebig angenommen, so kann man stets über den letzten derart verfügen, dass die Reihe konvergiert oder divergiert.

Bildet man jetzt die gegenüber den U (73) um $i+1$-Schritte verkürzten Prozesse:

$$W_{i+1}(\sigma) = l_{i+1}(n)(\sigma - 1), \tag{73'}$$

$$W_{i+2}(\sigma) = l_{i+2}(n) \cdot (W_{i+1} - 1), \ldots,$$

so gilt:

(O'.) „Die Reihe (64a):

$$u_n = \frac{1}{n \ln l_2 n \ldots (l_i n)^\sigma} = \frac{1}{L_{i-1}(n)(l_i n)^\sigma},$$

wo sich σ selbst mit wachsendem n der Einheit unbegrenzt von oben her nähere, konvergiert oder divergiert, jenachdem für irgend einen Index $k\,(=1,2,3\ldots)$ $\lim\limits_{n=\infty} W_{i+k}(\sigma) \gtrless 1$ ausfällt."

Die Vergleichung einer Reihe (2) mit einer geometrischen (22), hyperharmonischen (37), Bertrandschen (64a) führte auf Grund des Prinzips (H.), S. 330, zu den Kriterien zweiter Art (I.), (II.), (III.). Ebenso hätte man aber auch der Vergleichung das Prinzip (G.), S. 329, zu Grunde legen können: hierdurch werden Kriterien erster Art gewonnen, die theoretisch wichtig, wenn auch praktisch weniger bequem zu handhaben sind.

Sei erstens für eine Reihe u_n (2), von einem gewissen Gliede an, $u_n \leqq g^n$ $(0 < g < 1)$ d. i. $\sqrt[n]{u_n} \leqq g$, so konvergiert die Reihe der u: ist dagegen $\sqrt[n]{u_n} \geqq g\,(>1)$, so divergiert sie. Das ist das ebenfalls von Cauchy herrührende Kriterium erster Art:

(Ia.) „Eine Reihe mit positiven Gliedern u_n konvergiert resp. divergiert, wenn, von einem gewissen Gliede an, $\sqrt[n]{u_n} < g$, resp. $> g$ ist, wo unter g eine angebbare positive Grösse < 1 resp. > 1 zu verstehen ist."

Sei zweitens für eine Reihe u_n (2), von einem gewissen ν^{ten} Gliede an:

$$u_n < \frac{1}{n \ln l_2 n \ldots l_{i-1} n (l_i n)^\sigma} < \frac{1}{L_{i-1}(n)(l_i n)^\sigma},$$

$$(\sigma > 1), \quad (n = \nu, \nu+1, \ldots),$$

so konvergiert die Reihe der u gemäss (G.) und (III.). Die fragliche Ungleichung lässt sich in die Gestalt setzen:

$$(83) \qquad (l_i n)^\sigma < \frac{1}{L_{i-1}(n)\, u_n},$$

oder nach abermaliger Logarithmierung:

$$(84) \qquad \sigma < l \frac{1}{\frac{L_{i-1}(n)\, u_n}{l_{i+1} n}}.$$

Entsprechend verfährt man für $\sigma < 1$. Damit ist das von Bertrand aufgestellte Kriterium erster Art abgeleitet:

(IIIa.) „Eine Reihe positiver Glieder u_n konvergiert oder divergiert, jenachdem

$$l \frac{1}{\frac{L_{i-1}(n)\, u_n}{l_{i+1} n}}$$

bei beliebig wachsendem p stets oberhalb resp. stets unterhalb einer angebbaren Grösse $\sigma (> 1$ resp. $< 1)$ bleibt."

Die Theorie der Konvergenz- resp. Divergenzkriterien lässt sich noch erheblich weiterführen, wenn man als Vergleichsreihen solche von möglichst allgemeinem Charakter wählt. In umfassender Weise hat das Pringsheim*) ausgeführt.

§ 23. Fortsetzung.

Unendliche Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Für unendliche Reihen:

$$(2') \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots + v_{n+p} + \ldots,$$

deren einzelne Glieder beliebig positiv oder negativ sein können, ist die Definition (A.) (S. 318) der Konvergenz resp. Divergenz wie folgt zu modifizieren:

*) Math. Ann. 35 (1890), S. 297 ff. Vgl. auch den Artikel I A 3 der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, auf den überhaupt hinsichtlich der §§ 22, 23, 24 verwiesen sei.

(A.′) „Die Reihe (2′) mit positiven und negativen Gliedern v heisst *konvergent*, wenn n stets so hoch gewählt werden kann, dass der absolute Betrag des Restes:

$$R_{n,p} = s_{n+p} - s_n = v_n + v_{n+1} + \ldots + v_{n+p-1}$$

für jedes p unter eine vorgegebene, beliebig kleine (positive) Grösse η heruntergedrückt werden kann:

$$|R_{n,p}| < \eta;$$

$\lim s_n = s$ heisst dann die Summe der Reihe (in der Anordnung (2′)). Andernfalls heisst die Reihe (2′) *divergent*, und zwar *eigentlich*, wenn $|R_{n,p}|$ bei beliebig wachsendem n unendlich gross wird, dagegen *uneigentlich* divergent (*oscillierend*, *schwankend*), wenn $|R_{n,p}|$ überhaupt keinen festen Grenzwert besitzt.“*)

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass bei kongenten Reihen $\lim_{n=\infty} v_n = 0$ sein muss.

Wiederholt sind wir bisher auf „alternierende“ hen (2′) gestossen, d. h. solche, deren Glieder, wenigstens einer gewissen Stelle ab, abwechselnd positiv und negativ l, und, absolut genommen, niemals zu- und mit wachsen- n unbegrenzt abnehmen. Und zwar ursprünglich auf liche Reihen solcher Art (S. 118 ff., 123, 137, 264, 267, , 285, 293, 296), sodann auch auf unendliche (S. 266, , 271).

Das für endliche alternierende Reihen in § 12 (22a), 121 gefundene Fehlergesetz lässt sich mit geringen Abderungen auf unendliche Reihen solcher Art:

$$) \quad u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n+p} u_{n+p} + \ldots \; (u_{n+1} \leqq u_n, \lim u_n = 0)$$

rtragen, wo die u, wie früher, positive Grössen (> 0) be-

*) Das Letztere tritt offenbar bei der berühmten Reihe $1 + 1 - 1 + \ldots$ ein. Über eine systematische Konstruktion her oscillierenden Reihen siehe weiter unten die Anm. auf S. 366.

zeichnen, und wo der Einfachheit halber der ständige Vorzeichenwechsel nebst der Bedingung $u_{n+1} \leqq u_n$ bereits vom ersten Gliede an eintrete. Sei erstens n gerade. Dann lässt sich $R_{n,p}$ (4′) in eine der beiden Gestalten setzen:

$$\begin{cases} (86a) \quad R_{n,p} = (u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + (\,) + (\,) + \ldots, \\ (86b) \quad R_{n,p} = u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - (\,) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - (\,) - \ldots \end{cases}$$

Hier ist nach der Voraussetzung keine der Klammern negativ; die letzte ist entweder von der Form $(u_{n+p-2} - u_{n+p-1})$ oder aber u_{n+p-1}, und im ersteren Falle kann man sich stets p so gross gewählt denken, dass nicht alle Klammern verschwinden.

Aus (86a) folgt, dass $R_{n,p}$ sicher positiv ist, und zwar $> (u_n - u_{n+1})$, sodann aus (86b), dass $R_{n,p} < u_n$ wird:

$$(87) \qquad u_n - u_{n+1} < R_{n,p} < u_n \ (n \text{ gerade}).$$

Im Falle eines ungeraden n ist offenbar nur der jetzt negative Rest $R_{n,p}$ in (86a), (86b), und damit auch in (87) durch seinen absoluten Wert zu ersetzen. Da aber $\lim u_n = 0$, so ist damit das „Leibnizsche" Konvergenzkriterium erwiesen:

> (IV.) „Eine alternierende Reihe $(-1)^n u_n$, $(u_n > 0, n = 0, 1, 2, \ldots)$, deren Glieder, absolut genommen (wenigstens von einer gewissen Stelle ab) niemals zunehmen und bei wachsendem n den Grenzwert Null haben, konvergiert: bricht man die Reihe hinter einem Gliede mit geradem resp. ungeradem Index ab, so ist der begangene Fehler negativ resp. positiv, und, absolut genommen, kleiner als das absolut genommene erste Glied des Restes."

Als Beispiele dienen die oben zitierten Entwickelungsfälle für e^{-x}, $\sin x$, $\cos x$, $l(1+x)$, $(1+x)^n$, $\operatorname{arctg} x$, wenn man sie sich ohne Restglied als selbständige unendliche Reihen vorgelegt denkt.

Ist eine Reihe (2′) keine alternierende, so wird man ihre Konvergenzuntersuchung auf die einer Reihe (2) mit nur positiven Gliedern zurückzuführen versuchen: eine solche

erhält man jedenfalls, wenn man sämtliche Glieder v_n in (2′) durch ihre absoluten Beträge $u_n = |v_n|$ ersetzt. Dann gilt:

(P.) „Eine Reihe von positiven und negativen Gliedern v_n konvergiert, sobald es die Reihe der $|v_n|$ thut."

Denn es ist $|R_{n,p}| = |v_n + v_{n+1} + \ldots + v_{n+p-1}| \leqq u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$, und da das letztere Aggregat für $\lim n = \infty$ den Grenzwert Null hat, so auch $|R_{n,p}|$. Daher nennt man die Reihe der v in diesem Falle absolut konvergent. Man beweist dann ganz, wie auf S. 328, dass die Reihe der v denselben Grenzwert behält, gleichgültig wie ihre Glieder umgestellt werden. Denn man hat nur in der dort bewiesenen Ungleichung: $s'_{\alpha+1} - s_n \leqq R_{n,p}$ beiderseits die absoluten Werte zu nehmen, damit sie auch für den vorliegenden Fall gültig bleibt. In diesem Sinne nennt man die Reihe der v unbedingt konvergent.

Wir wenden uns nunmehr zu dem zweiten Hauptfalle, dass die Reihe der $|v_n|$ divergiert. Die positiven Glieder v der (2′) seien mit u, die negativen mit $-u'$ bezeichnet, und es sei für den Augenblick eine doppelte Numerierung gestattet, sodass sowohl der Index von u, wie der von u' alle Werte 0, 1, 2, ... durchlaufen möge; die Summe der ersten n Glieder u sei mit s_n, und die der ersten n' Glieder u' mit $s'_{n'}$ bezeichnet.

Falls die Reihe der $|v|$ divergiert, muss entweder die Teilreihe der u, oder die Teilreihe der u', oder endlich jede von beiden divergieren. Wenn aber nur eine der beiden Teilreihen divergiert, etwa die der u, die der u' aber konvergiert, so kann man im Reste $R_{n,p}$, wie gross n auch sei, stets p so hoch annehmen, dass $R_{n,p}$ jeden vorgegebenen positiven Wert überschreitet. Dann ist die Bedingung (5′) nicht erfüllt, und die Reihe (2′) divergiert nach $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Falls dagegen beide Teilreihen der u und u' divergieren, so kann überhaupt nach Riemann die Reihe der v bei geeigneter Umordnung der Glieder jeden beliebig vorgegebenen Wert g als Grenzwert besitzen. Man vereinige zu dem Zwecke, falls etwa g positiv ist, in der Reihe (2′) fortschreitend, so viele positive Glieder $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$, bis deren Summe s_n zum ersten Male g übertrifft, sodass also: $s_{n-1} < g < s_n$. Alsdann vereinige man mit s_n, wiederum in

der Reihe (2′) von vorn beginnend, so viele negative Glieder $-u'_0, -u'_1, \ldots, -u'_{n'-1}$, bis das erhaltene Aggregat zum ersten Male unter g heruntersinkt, sodass: $s_n - s'_{n'} < g < s_n - s'_{n'-1}$ wird. Nunmehr addiere man zu $s_n - s'_{n'}$ wiederum die positiven $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}$, bis $s_{n+p-1} - s'_{n'} < g < s_{n+p} - s'_{n'}$ wird, und subtrahiere soviel Glieder $u'_{n'}, u'_{n'+1}, \ldots u'_{n'+p'-1}$, bis $s_{n+p} - s'_{n'+p'} < g < s_{n+p} - s'_{n'+p'-1}$ entsteht, u. s. w. Dieser Prozess lässt sich ersichtlich infolge der Divergenz der beiden Teilreihen der u und der u' unbegrenzt fortsetzen.

Die Differenzen zwischen g und dem jedesmal erreichten, abwechselnd zu grossen und zu kleinen Werte sind, absolut genommen, kleiner als resp. $s_n - s_{n-1} = u_{n-1}$, $s'_{n'} - s'_{n'-1} = u'_{n'-1}$, $s_{n+p} - s_{n+p-1} = u_{n+p-1}$, $s'_{n'+p'} - s'_{n'+p'-1} = u'_{n'+p'-1}$ u. s. w., sinken also, da sowohl $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, wie $\lim_{n'=\infty} u'_{n'} = 0$, unter jede positive Grenze.

Analog ist der Vorgang, falls g negativ gewählt worden wäre. Damit ist der Satz bewiesen;*)

> (Q.) „Mittels einer Reihe von positiven und negativen Gliedern u, resp. $-u'$ kann man, falls jede der Teilreihen der u und u' divergiert, vermöge geeigneter Gliederumstellung jeden vorgegebenen Wert als Grenzwert erreichen. Falls aber nur eine der Teilreihen divergiert, die andere konvergiert, divergiert die vorgelegte Reihe gegen $+\infty$ resp. $-\infty$."

Im ersteren Falle sagt man, dass eine Reihe (2′) von positiven und negativen Gliedern v_n, die bei der durch (2′) vorgeschriebenen Anordnung der Glieder einen bestimmten

---

*) Das Riemannsche Verfahren lässt sich noch mannigfach modifizieren. Nimmt man z. B. ein beliebiges Intervall (a, b) $(b > a)$ als gegeben an, so vereinige man, in der Reihe (2′) fortschreitend, so viele positive Glieder u, bis man gerade b überschritten hat, sodann so viele negative Glieder $-u'$, bis man gerade unter a heruntergesunken ist u. s. w. Auf diese Weise wird bei wachsendem Index ν die Summe s_n der ersten n Glieder der so umgeordneten Reihe im Intervalle (a, b) hin und her oscillieren, d. h. s_n wird das Intervall unendlich oft hin und her durchlaufen, und zwar lässt sich, wenn g irgend ein Wert zwischen a und b ist, n stets so hoch wählen, dass *für diesen* Wert von n der absolute Unterschied $|s_n - g| < \eta$ wird, *wo η eine beliebig* kleine vorgegebene (positive) Grösse ist.

endlichen Grenzwert besitzt, während die Reihe der $|v_n|$ divergiert, bedingt konvergiere.

Dann liefert die Kombination von (P.) und (Q.) den erweiterten Satz:

> (V.) „Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern v konvergiert *dann und nur dann* unbedingt d. h. bei beliebiger Gliederumstellung gegen einen und denselben endlichen Grenzwert, wenn sie absolut konvergiert d. h. wenn die Reihe der $|v|$ konvergiert."

Ein instruktives Beispiel für die Wertänderungen, die eine Reihe (2′) gemäss (Q.) infolge von Gliederumstellungen erleidet, liefert die in § 20 (13), S. 271 für $l2$ aufgestellte alternierende Reihe:

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Lässt man hier auf p positive Glieder je q negative folgen, und denkt sich diesen Prozess n-mal vorgenommen, so erhält man ein Aggregat $s_{np,\,nq}$ von $n(p+q)$ Gliedern, das, mit der Reihe für $l2$ verglichen, gemäss (IV.) zu den Relationen führt:

$$\begin{cases} \text{(a)}\ l2 - s_{np,\,nq} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{nq+1} + \frac{1}{nq+2} + \ldots + \frac{1}{np}\right\} + R_a, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (p > q), \\ \text{(b)}\ l2 - s_{np,\,nq} = +\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{np+\frac{1}{2}} + \frac{1}{np+\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{1}{nq-\frac{1}{2}}\right\} + R_b, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (p < q), \end{cases}$$

wo R_a, R_b positive Reste $< \frac{1}{2np+1}$ resp. $< \frac{1}{2nq+1}$ bedeuten. Um die rechts stehenden Klammergrössen auszuwerten, bedienen wir uns wiederum (wie schon in der Anm. **) S. 350 ff.), um hier nicht die Integralrechnung heranzuziehen, der in § 3 entwickelten geometrischen Bestimmung der *Quadratur der gleichseitigen* Hyperbel $y = \frac{1}{x}$. Im Falle (a)

errichte man in den Punkten $x = nq, nq+1, \ldots, np$ der Abscissenachse die positiven Ordinatenlinien, und lege durch die zugehörigen Hyperbelpunkte Parallelen zur x-Achse, so wird der über der Strecke (nq, np) stehende Flächeninhalt J_{nq}^{np}, der nach § 3 S. 28 in Verbindung mit § 12 (IV.) S. 128 den Wert $l\frac{np}{nq} = l\frac{p}{q}$ hat, von den Summen der zu grossen resp. zu kleinen, über den Teilintervallen $(nq, nq+1)$, $(nq+1, nq+2), \ldots (np-1, np)$ stehenden Rechtecke eingeschlossen; die Differenz beider Summen ist $\frac{1}{nq} - \frac{1}{np}$. Somit erhält man für die rechts von (a) stehende Klammergrösse, als Summe der zu kleinen Rechtecke:

$$(a') \quad l\frac{p}{q} - \left\{\frac{1}{nq+1} + \frac{1}{nq+2} + \ldots + \frac{1}{np}\right\} < \frac{1}{n}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right),$$

wo die links stehende Differenz positiv ist, d. h. es ist $l\frac{p}{q}$ der Grenzwert der fraglichen Klammergrösse für $\lim n = \infty$. Analog ergiebt sich im Fall (b), wo $p < q$:

$$(b') \quad l\frac{nq-\frac{1}{2}}{np-\frac{1}{2}} - \left\{\frac{1}{np+\frac{1}{2}} + \frac{1}{np+\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{1}{nq-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$< \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{p-\frac{1}{2n}} - \frac{1}{q-\frac{1}{2n}}\right\},$$

und da:

$$\lim_{n=\infty} l\frac{nq-\frac{1}{2}}{np-\frac{1}{2}} = l\frac{q}{p},$$

so ist jetzt

$$l\frac{q}{p} = -l\frac{p}{q}$$

der Grenzwert der fraglichen Klammergrösse. Da endlich

in (a), (b) R_a, R_b bei wachsendem n gegen Null konvergieren, so hat man in beiden Fällen:

$$\lim_{n=\infty} s_{np,\,nq} = l2 + \frac{1}{2} l \frac{p}{q}.$$

Würde man auf die letzten q negativen Glieder nochmals p positive folgen lassen, so unterschiede sich das so entstehende Aggregat $s_{(n+1)p,\,nq}$ von $s_{np,\,nq}$ um die Summe:

$$\frac{1}{2np+1} + \frac{1}{2np+3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)p-1},$$

die offenbar $< \frac{p}{2np+1}$, also ebenfalls für $\lim n = \infty$ gegen Null konvergiert.

Damit ist der von M. Ohm herrührende Satz abgeleitet:

„Ordnet man in der Reihe für $l2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$$

die Glieder derart um, dass immer auf p positive q negative Glieder folgen, so konvergiert die neue Reihe gegen den Grenzwert

$$l2 + \frac{1}{2} l \frac{p}{q}.“$$

Dieser Satz ist nach Schloemilch übertragbar*) auf alle konvergenten alternierenden Reihen $u_n = (-1)^{n+1} a_n$, die im wesentlichen denselben Charakter besitzen, wie die Reihe für $l2$, dass nämlich die a positiv, und $\lim n a_n$ ein endlicher Grenzwert g (inkl. 0) ist. Nach dem Muster (a) ($p > q$) beträgt die Wertänderung, die entsteht, wenn man wiederum auf je p positive q negative Glieder folgen lässt:

*) Ganz allgemein hat solche Wertänderungen, die bedingt konvergente Reihen durch Gliederumstellungen erleiden, Pringsheim *untersucht; Mathem. Ann.*, Bd. 22 (1883) S. 455 ff.

$$\lim_{n=\infty}\{a_{2(nq+1)}+a_{2(nq+2)}+\ldots+a_{2np}\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\left\{\frac{2(nq+1)a_{2(nq+1)}}{nq+1}+\frac{2(nq+2)a_{2(nq+2)}}{nq+2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{2npa_{2np}}{np}\right\}.$$

Denkt man sich n bereits so gross, dass für jeden Index ν innerhalb der geschweiften Klammer νa_ν in den Grenzen $g+\varepsilon$ und $g-\varepsilon$ eingeschlossen ist, so ist der Wert des Klammerausdrucks eingeschlossen in den Grenzen:

$$(g+\varepsilon)\left(\frac{1}{nq+1}+\frac{1}{nq+2}+\ldots+\frac{1}{np}\right)$$

und

$$(g-\varepsilon)\left(\frac{1}{nq+1}+\frac{1}{nq+2}+\ldots+\frac{1}{np}\right).$$

Mit Rücksicht auf (a′) ergiebt sich somit:

$$\lim_{n=\infty}\{a_{2(nq+1)}+a_{2(nq+2)}+\ldots+a_{2np}\}$$

$$=\frac{1}{2}l\frac{p}{q}\cdot\lim_{\nu=\infty}\nu a_\nu=\frac{1}{2}g\cdot l\frac{p}{q},$$

und das nämliche gilt im Falle (b), wenn $p<q$:

„Unterwirft man eine konvergente alternierende Reihe $u_n=(-1)^{n+1}a_n$, wo die a positiv und $\lim_{n=\infty} na_n$ ein endlicher Grenzwert g (inkl. 0) ist, einer solchen Gliederumordnung, dass man stets auf p positive Glieder q negative folgen lässt, so besitzt die neue Reihe einen Grenzwert, der den der alten um $\frac{1}{2}g\cdot l\frac{p}{q}$ übertrifft.“

§ 24. Fortsetzung.

Unendliche Produkte.

In § 20, S. 278ff. wurde bewiesen, dass der absolute Wert des n^{ten} Binomialkoeffizienten m_n einer Grösse m bei unbegrenzt wachsendem n den Grenzwert 0 resp. $+\infty$ besass, jenachdem $m+1>0$ resp. <0 war. Schreibt man:

$$|m_n| = \frac{|m|}{1}\frac{|m-1|}{2}\cdots\frac{|m-n+1|}{n} = f_1 f_2 \cdots f_n,$$

so ist der i^{te} Faktor $f_i = 1 - \frac{m+1}{i}$ (sobald $i > m+1$ genommen wird). Da die harmonische Reihe (s. S. 325):

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{m+1}{n} = (m+1)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}$$

divergiert, so wird man auf die allgemeinere Frage geführt, ob ein nach irgend einem Gesetze unbegrenzt fortsetzbares Produkt von der Gestalt:

$$(88)\qquad f_0 f_1 \cdots f_n \cdots f_{n+p} \cdots = (1-u_0)(1-u_1)\cdots(1-u_n)\cdots (1-u_{n+p})\cdots,$$

wo (wenigstens von einer gewissen Stelle an) alle u positiv, $\lim u_n = 0$ und die Reihe der u divergiert, stets den Grenzwert 0 besitzt? Seien von u_i an alle u positiv und bereits <1, und $\nu \geqq i$, so folgt aus $(1-u_\nu)^2 = (1-u_\nu)(1+u_\nu)$ i. e. $1-u_\nu = \frac{1-u_\nu^2}{1+u_\nu}$:

$$(89)\qquad 1-u_\nu < \frac{1}{1+u_\nu},\quad \prod_{\nu=i}^{\nu=n}(1-u_\nu) < \frac{1}{\prod_{\nu=i}^{\nu=n}(1+u_\nu)}.$$

Da aber $\prod_{\nu=i}^{\nu=n}(1+u_\nu) = 1 + \sum_{\nu=i}^{\nu=n} u_\nu +$ positiven Gliedern, und *nach Voraussetzung* Σu_ν bei wachsendem n jede Grenze

überschreitet, so ist in der That $\lim_{n=\infty} \prod_{\nu=i}^{\nu=n} (1-u_\nu) = 0$. Man hat also den Satz:

(R.) „Ein unendliches Produkt von der Art: $(1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_n)\ldots$, wo die u (wenigstens von einer gewissen Stelle an) positiv sind und $\lim u_n = 0$, während die Reihe der u divergiert, hat den Grenzwert Null, dagegen das Produkt $(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots$ den Grenzwert Unendlich.“*)

Ein zweiter Beweis geht mittels der Ungleichung: $l\frac{1}{1-x} > x\,(0<x<1)$ (s. S. 326) hervor. Danach gilt für den natürlichen Logarithmus des reziproken Wertes von $\prod_{\nu=i}^{\nu=n}(1-u_\nu)$:

$$(90) \qquad l\frac{1}{\prod_{\nu=i}^{\nu=n}(1-u_\nu)} = \sum_{\nu=i}^{\nu=n} l\frac{1}{1-u_\nu} > \sum_{\nu=i}^{\nu=n} u_\nu,$$

*) Wendet man dies an auf die divergente Bertrandsche Reihe (S. 327): $u_i = \frac{1}{L_i(n)}$, $L_i(n) = \frac{1}{n\,l n\,l_2 n \ldots l_i n}$, so hat das unendliche Produkt mit dem allgemeinen Faktor $f_n = 1 - \frac{1}{L_i(n)}$ resp. $f_n 1 = +\frac{1}{L_i(n)}$ den Grenzwert Null resp. Unendlich. Hieraus geht sofort das Kriterium hervor: „Wenn bei einem vorgelegten unendlichen Produkte positiver Faktoren $L_i(n)(f_n - 1) = L_i(n)\left\{\frac{\Pi_{n+1}}{\Pi_n} - 1\right\}$ bei beliebig wachsendem n stets < 0 resp. stets > 0 bleibt, so hat das Produkt den Grenzwert Null resp. Unendlich.“ Denn wenn (von einem gewissen n ab) stets $L_i(n)(f_n - 1) < -g$ bleibt, wo g eine feste positive Grösse bedeutet, so ist auch $f_n < 1 - \frac{g}{L_i(n)}$, mithin hat das fragliche Produkt umsomehr den Grenzwert Null, als dies für das Produkt mit dem allgemeinen Faktor $f_n = 1 - \frac{g}{L_i(n)}$ der Fall ist. Und entsprechend, wenn $L_i(n)(f_n - 1) > g$, *so ist* auch $f_n > 1 + \frac{g}{L_i(n)}$, und das fragliche Produkt wird stärker *unendlich*, als das mit dem allgemeinen Faktor $f_n = 1 + \frac{g}{L_i(n)}$.

mithin hat $l\dfrac{1}{\prod_{\nu=n}^{\nu=i}(1-u_\nu)}$ für $\lim n = \infty$ den Grenzwert $+\infty$,

also auch $\dfrac{1}{\prod_{\nu=n}^{\nu=i}(1-u_\nu)}$ selbst.

Da aus verschiedenen Gründen*) der Fall, wo ein unendliches Produkt den Grenzwert 0 besitzt, als ebenso singulär anzusehen ist, wie der Fall, wo es den Grenzwert ∞ hat, so schliesst man bei einer allgemeinen Konvergenzdefinition besser auch den ersteren Fall aus und bezeichnet ihn mit Pringsheim als Divergenz nach 0 (wie im letzteren Falle nach ∞).

In Analogie mit der Erscheinung einer konvergenten Reihe (S. 317) wird man von einem „unendlichen" d. h. nach irgend einem Gesetze unbegrenzt fortsetzbaren Produkte:

$$f_0 f_1 \ldots f_{n-1} f_n f_{n+1} \ldots f_{n+p-1} f_{n+p} \ldots \tag{91}$$

zunächst das Produkt Π_n aus den n ersten Faktoren abspalten:

$$\Pi_n = f_0 f_1 \ldots f_{n-1}, \tag{92}$$

sodann den „Rest" oder das „Restprodukt" $P_{n,p}$ von p Faktoren bilden:

$$P_{n,p} = \frac{\Pi_{n+p}}{\Pi_n} = f_n f_{n+1} \cdots f_{n+p-1}, \tag{93}$$

und für letzteres Konvergenzeigenschaften festsetzen, die bei beliebig wachsendem n von der Grösse der Zahl p unabhängig sind.

---

*) Für solche Produkte mit dem Grenzwert 0 trifft u. a. das fundamentale Gesetz, „wonach ein aus einer endlichen Anzahl von Faktoren bestehendes Produkt dann und nur dann verschwindet, wenn wenigstens einer der Faktoren verschwindet", nicht mehr zu.

Der innere Grund, weshalb die beiden Fälle des Grenzwertes 0 resp. ∞ für unendliche Produkte als wesentlich gleichberechtigt erscheinen, tritt deutlicher hervor, wenn man, wie weiter unten (S. 377), statt des Produktes seinen Logarithmus untersucht; der letztere wird dann und nur *dann unendlich*, wenn sein Argument entweder gegen 0 *oder aber gegen* $+\infty$ *konvergiert*.

Soll das unendliche Produkt (91) der f gegen einen bestimmten Grenzwert Π (sc. exkl. 0, ∞) konvergieren, so ist dazu*) ersichtlich notwendig und hinreichend, dass für ein genügend hoch gewähltes n der Wert von Π_n (92) durch Hinzufügung des Produktes $P_{n,p}$ (93), für jeden Wert von p, nicht mehr wesentlich geändert wird, d. h. dass sich $P_{n,p}$ von der Einheit nur um eine positive oder negative Grösse η unterscheidet, die für $\lim n = \infty$ den Grenzwert Null hat. Ferner ist für die Konvergenz von (91) gegen Π offenbar erforderlich, dass, wenigstens von einer gewissen Stelle an, alle Teilfaktoren f positiv sind; der Einfachheit halber darf man festsetzen, dass das von Anfang an der Fall ist, sowie, dass jeder Faktor f bereits < 2 ist. Danach wird man zu folgender Definition geführt:

---

*) Aus dieser, in (95) fixierten Bedingung folgt, dass man n so hoch, $\geqq \nu$ wählen kann, dass das Produkt Π_{n+p} für jeden Wert von p zwischen den Werten $\Pi_\nu(1+g_\nu)$ und $\Pi_\nu(1-g_\nu)$ enthalten ist, wo g_ν eine vorgeschriebene, feste, positive Grösse < 1 bedeutet d. h. $|\Pi_\nu|$ kann, wie gross auch n werde, weder eine gewisse obere Grenze $|\Pi_\nu|(1+g_\nu)$ überschreiten, noch unter eine gewisse untere Grenze $|\Pi_\nu|(1-g_\nu)$ heruntergehen, womit die beiden Fälle der Divergenz nach ∞ resp. 0 ausgeschlossen werden. Aus

$$\left|\frac{\Pi_{n+p}}{\Pi_n} - 1\right| = \frac{|\Pi_{n+p} - \Pi_n|}{|\Pi_n|} < \eta$$

folgt dann weiter, dass:

$$|\Pi_{n+p} - \Pi_n| < \eta\,|\Pi_n| < \eta\,|\Pi_\nu|(1+g_\nu),$$

also $|\Pi_{n+p} - \Pi_n|$ bei genügend hohem n und für jedes p unter eine beliebig klein vorgebbare (positive) Grösse $\varepsilon = \eta\,|\Pi_\nu|(1+g_\nu)$ heruntergedrückt werden kann. Damit erscheint der Grenzwert von Π_n für $\lim n = \infty$ als Grenzwert einer Fundamentalreihe. (S. 318 ff.).

Umgekehrt, wenn für ein unendliches Produkt $|\Pi_{n+p} - \Pi_n| < \varepsilon$, so kann zunächst $|\Pi_n|$ eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten. Fügt man dann ausdrücklich die Forderung hinzu, dass $|\Pi_n|$ auch unter eine gewisse untere Grenze $\gamma\,(>0)$ nicht heruntersinken soll, (womit die Divergenz nach 0 ausgeschlossen wird), so ergiebt sich wiederum:

$$\frac{|\Pi_{n+p} - \Pi_n|}{|\Pi_n|} < \frac{\varepsilon}{|\Pi_n|} < \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

d. h. die Bedingung des Textes (95): $\left|\frac{\Pi_{n+p}}{\Pi_n} - 1\right| < \eta$ ist erfüllt, wo $\eta = \frac{\varepsilon}{\gamma}$ beliebig vorgeschrieben werden darf.

(A″.) „Ein unendliches Produkt:

(94) $f_0 f_1 \dots f_n \dots f_{n+p} \dots = (1+v_0)(1+v_1)\dots(1+v_n)\dots (1+v_{n+p})\dots,$

wo die v positive und negative Grössen sind, die, absolut genommen, unterhalb der Einheit liegen, heisst *konvergent*, wenn sich n stets so hoch wählen lässt, dass für jedes p:

(95) $$|P_{n,p} - 1| < \eta$$

gemacht werden kann, wo η eine beliebig klein vorgegebene (positive) Grösse bedeutet, und wo unter $P_{n,p}$ der Rest (das Restprodukt):

(93) $$P_{n,p} = \frac{\Pi_{n+p}}{\Pi_n} = f_n \dots f_{n+p-1} = (1+v_n)\dots(1+v_{n+p-1})$$

zu verstehen ist. Andernfalls *divergiert* das Produkt (94), und zwar entweder *eigentlich* d. h. gegen den Grenzwert 0 oder ∞, oder aber *uneigentlich* (es *oscilliert*, *schwankt*), wenn Π_n bei beliebig wachsendem n überhaupt keinen bestimmten Grenzwert besitzt."

Aus dieser Festsetzung folgt sofort als eine notwendige Bedingung der Konvergenz des Produktes (94), dass $\lim_{n=\infty} v_n = 0$ sein muss, denn für $p=1$ wird $P_{n,p} - 1 = 1 + v_n - 1 = v_n$.

Wie in dem besonderen Falle (R.), wo alle v negativ (resp. positiv) waren und die Summe der v divergierte, wird man auch im allgemeinen Falle (94) die Untersuchung der Konvergenz resp. Divergenz des Produktes der $1+v$ auf die der Reihe der v zurückzuführen versuchen.

Der nächste Schritt wird sein, dass man die v_n alle positiv annimmt (und, wie früher, mit u_n bezeichnet), so, dass die Reihe der $v = u$ konvergiert.

Denkt man sich das Restprodukt $P_{n,p}$ (93) für den vorliegenden Fall ausgeführt, so ergiebt sich:

(96) $$P_{n,p} = (1+u_n)\dots(1+u_{n+p-1}) = 1 + s_1 + s_2 + \dots + s_p,$$

wo unter s_i die Summe der Produkte der u zu je i verstanden sei. Zwischen den s_i bestehen einfache Ungleich-

ungen. Führt man nämlich das Produkt $s_1 s_i$ aus, so ergeben sich einmal die Glieder von s_{i+1}, und zwar jedes i-mal, sodann noch weitere positive Glieder, sodass man hat: $s_{i+1} < \frac{s_1 s_i}{i}$, und hieraus successive:

$$s_2 < \frac{s_1^2}{2},\ s_2 < \frac{s_1 s_2}{3} < \frac{s_1^3}{3!},\ s_4 < \frac{s_1 s_3}{4} < \frac{s_1^4}{4!}, \ldots,$$

also allgemein:

$$s_i < \frac{s_1^i}{i!}. \tag{97}$$

Damit geht aus (96) die Ungleichung hervor:

$$P_{n,p} < 1 + s_1 + \frac{s_1^2}{2!} + \ldots + \frac{s_1^p}{p!}. \tag{98}$$

Da infolge der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe der u die Restsumme $s_1 = u_n + \ldots + u_{n+p-1}$ bei wachsendem n beliebig klein gemacht werden kann, so wird $P_{n,p}$, das sicher > 1 ist, von der Form:

$$P_{n,p} = 1 + \varepsilon_n,\ \varepsilon_n > 0,\ \lim \varepsilon_n = 0. \tag{99}$$

Denn die rechte Seite von (98) konvergiert (s. Formel (31), S. 332), und zwar mit wachsendem p gegen e^{s_1}. Damit ist die Konvergenzbedingung (A".) erfüllt, und zugleich eine Abschätzung des Restes $P_{n,p}$, wenn $n = \nu$ gegeben, und p beliebig gewählt wird:

> (S.) „Ein unendliches Produkt $(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots$ konvergiert, wenn die u positiv sind und die Reihe der u konvergiert; bricht man hinter dem ν^{ten} Faktor $1+u_{\nu-1}$ ab, so ist das Restprodukt $P_{\nu,p} < e^{R_\nu}$, wenn $R_{\nu,p} = u_\nu + u_{\nu+1} + \ldots + u_{\nu+p-1}$ für jedes $p \leqq R_\nu$ ist, d. h. der „*Fehler*", oder der Überschuss des Restes $P_{\nu,p}$ über die Einheit ist positiv und fällt $< e^{R_\nu} - 1$*) aus."

*) Bedient man sich der Abschätzungsregel des § 12 (V), S. 137, so wird z. B., sobald $R_\nu < 2$, $e^{R_\nu} - 1 < \frac{R_\nu}{1 - \frac{R_\nu}{2}}$, also um so mehr der „Fehler" $P_{\nu,p} - 1 < \frac{R_\nu}{1 - \frac{R_\nu}{2}}$.

Die nemliche Bemerkung gilt für die weiter folgenden *Fehlerabschätzungen* (98′), (98″), (101).

So könnte man auf elementarem Wege*) fortfahren; zum Falle des Produktes $(1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_n)\ldots$ übergehen, wo die u positiv sind und die Reihe der u konvergiert, bis man zum allgemeinsten Falle des Produktes (94) aufstiege. Indessen ist dieser direkte elementare Weg mühsam; wir werden es daher vorziehen, mit Cauchy, wie schon im Falle (R.), statt des Produktes resp. des Restproduktes dessen (natürlichen) Logarithmus auf seinen Grenzwert hin zu untersuchen.

Wird dieses Prinzip zuvörderst auf den Fall (S.) angewandt, so hat man zu zeigen, dass $l\,P_{n,p}$ für $\lim n=\infty$ den Grenzwert Null hat. Nach S. 326 gilt bei positivem u_i die Ungleichung: $l(1+u_i)<u_i$, somit $l\,P_{n,p}<\sum_{i=n}^{i=n+p-1} u_i$ i. e. $<R_{n,p}$, woraus zugleich wiederum $P_{n,p}<e^{R_{n,p}}$ folgt.

Sei nunmehr $\prod_0^\infty(1-u_n)=(1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_n)\ldots$, wo die Reihe der positiven u (<1) konvergiere**). Nach dem Mittelwertsatze wird:

---

*) Eine solche Durchführung hat Pringsheim geleistet: Math. Ann. 33 (1889), S. 119. Implizite wird dabei der elementar (nach dem Muster auf S. 268) beweisbare Satz benutzt, dass, wenn man die auf der rechten Seite von (98) stehende Reihe $1+s_1+\frac{s_1^2}{2!}+\ldots$ einmal für s_1, das anderemal für t_1 bildet, das Produkt beider Reihen gleich der ursprünglichen, gebildet für den Wert s_1+t_1 wird. Mit anderen Worten: es wird das Gesetz $e^x e^y=e^{x+y}$ verwertet, oder, was dasselbe ist, $l(xy)=lx+ly$, wenn auch die Funktion lx nicht explizite eingeführt zu werden braucht. Auf letzterem Gesetz beruht aber die Brauchbarkeit und Durchsichtigkeit der weiter unten im Texte befolgten Methode.

**) Ein einfaches Beispiel hierfür ist das in § 5 (IIb.) S. 48 zu Grunde liegende unendliche Produkt:

$$\cos x\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\ldots$$

Hier ist, wie sofort dem Mittelwertsatze oder auch der Reihenentwickelung des Cosinus (S. 267) zu entnehmen ist:

$$f_n=\cos\frac{x}{2^n}=1-u_n,\quad \text{wo } u_n<\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{4^n},$$

wo also die Reihe der u, abgesehen von dem gemeinsamen Faktor $\frac{x^2}{2}$, *die konvergente geometrische* Reihe $\sum\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ist. Zwei weitere Bei-

$$l(1-u_i) = \frac{-u_i}{1-\vartheta_i u_i}\ (0<\vartheta_i<1),\quad l\frac{1}{1-u_i} = |l(1-u_i)| = \frac{u_i}{1-\vartheta_i u_i},$$

folglich $|l(1-u_i)| < \frac{u_i}{1-u_i}$. Da $\lim u_n = 0$, so bleiben alle u_i von einer gewissen Stelle u_ν ab, unterhalb einer festen endlichen (positiven) Grenze u (<1), dann wird umsomehr:

$$|l(1-u_i)| < \frac{u_i}{1-u}\ (i=\nu,\ \nu+1,\ldots),$$

$$|l\,P_{\nu,p}| = \sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} |l(1-u_i)| < \frac{1}{1-u}R_{\nu,p};$$

mithin ist $\lim_{n=\infty} l\,P_{n,p} = 0$, $\lim_{n=\infty} P_{n,p} = 1$, woraus die Konvergenz des Produktes der $1-u_i$ folgt, nebst der Restabschätzung:

$$(98')\qquad \frac{1}{P_{\nu,p}} < e^{\frac{1}{1-u}R_{\nu,p}} < e^{\frac{1}{1-u}R_\nu}{}^{*}),$$

wenn für jedes p $R_{\nu,p} \leqq R_\nu$ ist.

---

spiele bieten die am Schlusse des Textes in (115) S. 390 aufgestellten Produktentwickelungen für $\sin x$ und $\cos x$. Umgekehrt sind die reziproken Werte jener Produkte Beispiele für den Typus $(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots$

*) Setzt man für den Augenblick $e^{\frac{1}{1-u}R_\nu} = \varrho$, so wird $\frac{1}{P_{\nu,p}} - 1 < \varrho - 1$, also $1 - P_{\nu,p} < P_{\nu,p}(\varrho-1)$, und a fortiori, da $P_{\nu,p} < 1$, der „Fehler" $1 - P_{\nu,p} < \varrho - 1$ (wo man auf $\varrho - 1$ wiederum die praktische Abschätzung der Anmerkung auf S. 376 anwenden möge). Somit lassen sich die beiden Fälle (98), (98′) unter die Fehlerregel $|P_{\nu,p} - 1| < e^{\frac{1}{1-u}R_\nu} - 1$ zusammenfassen.

Im Falle (98′) lässt sich die Abschätzung noch vereinfachen. Denn da (s. S. 326) $1 - P_{\nu,p} < l\frac{1}{1-(1-P_{\nu,p})}$, so ist a fortiori:

$$1 - P_{\nu,p} < \frac{1}{1-u}R_\nu.$$

Des Weiteren sei das Produkt (94) der $1-v_i$ vorgelegt, wo die v_i beliebig positiv und negativ seien, $|v_i|<1$, die Reihe der v_i unbedingt (also die Reihe der $|v|=u$ gegen einen endlichen Grenzwert) konvergiere.

Von einer gewissen, ν^{ten} Stelle an, bleibt wiederum u_i unterhalb einer festen oberen (positiven) Grenze $u\,(<1)$; dann gilt für positive und negative v:

$$|l(1+v_i)|<\frac{u_i}{1-u}\;(i=\nu,\ \nu+1,\ldots),$$

also auch in diesem Falle:

$$|l\,P_{\nu,p}|=\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1}|l(1+v_i)^{*})|<\frac{1}{1-u}\,(u_\nu+u_{\nu+1}+\ldots+u_{\nu+p-1})$$
$$<\frac{1}{1-u}\,R'_\nu,$$

wenn der Rest $R'_{\nu,p}=u_\nu+u_{\nu+1}+\ldots+u_{\nu+p-1}$ der u-Reihe für jedes $p\leqq R'_\nu$ ausfällt. Das liefert die Konvergenz des Produktes der $1+v_i$ mit der Restabschätzung:

$$(98'')\qquad |P_{\nu,p}-1|<e^{\frac{1}{1-u}R'_\nu}-1.$$

Es gilt also, gemäss (V.) S. 367:

(T.) „Ein unendliches Produkt:

$$(1+v_0)(1+v_1)\ldots(1+v_n)\ldots,$$

wo die v_i beliebig positiv und negativ sind, konvergiert stets, falls die Reihe der v un-

*) Will man überhaupt ein unendliches Produkt $\overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}(1+v_n)$ in eine unendliche Reihe umwandeln, so kann man sich einer einfacheren Methode bedienen. Es ist $\Pi_n=\Pi_1+(\Pi_2-\Pi_1)+(\Pi_3-\Pi_2)+\ldots+(\Pi_n-\Pi_{n-1})$, und da $\Pi_{\nu+1}-\Pi_\nu=\Pi_\nu(1+v_\nu-1)=\Pi_\nu v_\nu$, so geht das unendliche Produkt (gleichgültig ob es konvergiert oder divergiert) über in die unendliche Reihe: $\Pi_1+\Pi_1 v_1+\Pi_2 v_2+\ldots+\Pi_n v_n+\ldots$.

Umgekehrt lässt sich eine vorgelegte unendliche Reihe $v_0+v_1+\ldots+v_n+\ldots$ durch das unendliche Produkt: $s_1\cdot\frac{s_2}{s_1}\cdot\frac{s_3}{s_2}\ldots\frac{s_n}{s_{n-1}}\ldots$ *ersetzen, wo wieder* s_n die Summe der ersten n Glieder der Reihe *bedeutet.*

bedingt konvergiert: bricht man hinter dem Faktor $1+v_{\nu-1}$ ab, so gilt für das Restprodukt: $|P_{\nu,p}-1|<e^{\frac{1}{1-u}R'_\nu}-1$, wo alle $|v_i|(i=\nu, \nu+1,\ldots,)\leqq u$, und der Rest der $|v|$-Reihe: $|v_\nu|+|v_{\nu+1}|+\ldots|v_{\nu+p-1}|$ für jedes p den Wert R'_ν nicht überschreitet."

Es bleibt noch der Fall eines Produktes von Faktoren $1+v_i$ mit positiven und negativen v_i zu erledigen, wenn die Reihe der v nur bedingt konvergiert, also die Reihe der $|v_i|=u_i$ divergiert. Dann versagen die bisherigen Schlüsse und man muss für $l(1+v_i)$ den einmal erweiterten Mittelwertsatz zu Hilfe nehmen.

Auf Grund der Definition (A'.), S. 363, ist:

$$\lim_{n=\infty} R_{n,p}=\lim_{n=\infty}(v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+p-1})=0,\quad \lim_{n=\infty} v_n=0.$$

Es ergiebt sich, sobald $|v_i|<1$:

$$l(1+v_i)=v_i-\frac{v_i^2}{2}\frac{1}{(1+\vartheta_i v_i)^2}\quad(0<\vartheta_i<1),$$

somit:

$$(100)\quad l\,P_{\nu,p}=\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} l(1+v_i)=R_{\nu,p}-\frac{1}{2}\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1}\frac{v_i^2}{(1+\vartheta_i v_i)^2}\quad(0<\vartheta_i<1).$$

Wegen $\lim_{n=\infty} R_{n,p}=0$ lässt sich bei gegebenem ν eine feste obere (positive) Grenze ϱ_ν angeben, sodass $|R_{\nu,p}|$ für jedes p den Wert ϱ_ν nicht überschreitet. Von $|v_\nu|=u_\nu$ ab sei wiederum $u_\nu\leqq u$, so wird:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1}\frac{v_i^2}{(1+\vartheta_i v_i)^2}<\frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} v_i^2.$$

Falls daher auch $\sum v_i^2$ konvergiert, also $\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} v_i^2$ bei gegebenem ν und beliebigem p eine feste obere (positive) Grenze V_ν nicht überschreitet, so folgt für den absoluten Betrag der linken Seite von (100) die Ungleichung:

$$(101)\qquad |l\,P_{n,p}|<\varrho_\nu+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu$$

und damit: $$|P_{\nu,p}-1|<e^{\varrho_\nu+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu}-1.$$

Dann aber wird abermals $\lim_{n=\infty} l P_{n,p} = 0$, und das Produkt der $1 + v_i$ konvergiert gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert (sc. exkl. 0), mit der Fehlerabschätzung (101).

Dass diese Konvergenz indessen nur eine bedingte ist, beweist man durch geeignete Faktorenumstellung ganz, wie bei der analogen Erscheinung der bedingt konvergenten Reihen (s. den Satz (Q.) S. 366). Seien, wie damals, die positiven v mit u, die negativen v mit $-u'$ bezeichnet.

Da die Reihe der u, wie der u' divergiert, so divergiert nach (R.) das Produkt der $1 + u$ gegen Unendlich, das der $1 - u'$ gegen Null. Beiden Produkten (am einfachsten genommen in der Reihenfolge ihrer Faktoren) lassen sich jeweils so viele Faktoren entnehmen, dass ein beliebig vorgegebener Wert g*) abwechselnd über- und unterschritten wird, während man sich bei hinreichender Fortsetzung dieses Prozesses dem Werte g unbegrenzt nähert.

Diese Schlüsse hinsichtlich der Faktorenumstellung sind offenbar ganz unabhängig davon, ob Σv_i^2 konvergiert oder divergiert. Tritt aber der letztere Fall ein, so ist leicht zu sehen, dass das Produkt der $1 + v_i$ (in der vorgeschriebenen Anordnung (94), wo die Summe der v gegen einen endlichen Grenzwert bedingt konvergiert) nur noch gegen Null divergieren kann. Denn dann wird gemäss (100):

$$(100) \qquad l\frac{1}{P_{n,p}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n+p-1}\frac{v_i^2}{(1+\vartheta_i v_i)^2} - R_{n,p} \quad (0<\vartheta_i<1),$$

$$(102) \qquad l\frac{1}{P_{n,p}} > \frac{1}{2(1+u)^2}\sum_{i=n}^{i=n+p-1} v_i^2 - R_{n,p};$$

mithin wird, da $\lim_{n=\infty} R_{n,p} = 0$, und Σv_i^2 divergiert, $\lim l\frac{1}{P_{n,p}}$ positiv unendlich, also $l P_{n,p}$ negativ unendlich, mithin $\lim P_{n,p} = 0$, und damit das Produkt der $1 + v_i$ selbst.

Damit ist der Hauptsatz über die unendlichen Produkte bewiesen:

---

*) Dieser Wert lässt sich auch negativ annehmen, falls man zulässt, dass das Produkt eine (nach obigem notwendig endliche) ungerade Anzahl negativer Faktoren enthält.

(VI.) „Ein unendliches Produkt:

$$(1 + v_0)(1 + v_1) \ldots (1 + v_n) \ldots,$$

wo die v beliebig positiv und negativ seien, und $\lim v_n = 0$, konvergiert *unbedingt*, d. h. bei jeder Faktorenanordnung gegen einen und denselben, (von 0 und ∞ verschiedenen) Grenzwert, *dann und nur dann*, wenn es *absolut* konvergiert, d. h. wenn die Reihe der $|v|$ konvergiert, und zwar mit der in (T.) angegebenen Fehlerabschätzung.

Wenn dagegen die Reihe der v nur bedingt konvergiert d. h. die Reihe der $|v|$ divergiert, so konvergiert das Produkt *bedingt*, mit der Restabschätzung (101), falls die Reihe der v^2 konvergiert: sobald dagegen die Reihe der v^2 divergiert, divergiert das Produkt gegen Null."

Produktentwickelungen von sin x und cos x.

Als eine der interessantesten Anwendungen der Theorie der unendlichen Produkte auf die Elementarmathematik sollen zum Schlusse die trigonometrischen Funktionen sin x und cos x für jeden Wert des Argumentes x in unendliche Produkte entwickelt werden.

Drückt man auf Grund des Additionstheoremes der Trigonometrie (s. § 20, S. 267) der Reihe nach cos $2a$, sin $2a$; cos $4a$, sin $4a$; cos $6a$, sin $6a$; ... durch sin a und cos a aus, so wird man auf den Ansatz geführt, dass bei geradem m:

$$(103) \quad \cos ma = f_{\frac{m}{2}}(\sin^2 a), \quad \sin ma = \sin a \cos a \, g_{\frac{m}{2}-1}(\sin^2 a)$$

wird, wo $f_{\frac{m}{2}}$, $g_{\frac{m}{2}-1}$ ganze Funktionen der bezeichneten Grade von $\sin^2 a$ bedeuten. Um die Formeln (103) allgemein zu beweisen, sei deren Richtigkeit für m angenommen; geht man dann zum nächsten Falle $m + 2$ über, so kommt, da $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$:

$$\left\{\begin{aligned}\cos\{(m+2)a\} &= \cos ma\cos 2a - \sin ma\sin 2a\\ &= f_{\frac{m}{2}}(\sin^2 a)\cos 2a - \sin a\cos a\sin 2a\, g_{\frac{m}{2}-1}(\sin^2 a)\\ &= f_{\frac{m+2}{2}}(\sin^2 a),\\ \sin\{(m+2)a\} &= \sin ma\cos 2a + \cos ma\sin 2a\\ &= \sin a\cos a\cos 2a\, g_{\frac{m}{2}-1}(\sin^2 a) + f_{\frac{m}{2}}(\sin^2 a)\sin 2a\\ &= \sin a\cos a\, g_{\frac{m}{2}}(\sin^2 a).\end{aligned}\right.$$

Da aber für $m = 1$ das Gesetz (103) erfüllt ist, so gilt es allgemein. Berücksichtigt man noch, dass für $\sin a = 0$ einerseits $\cos ma = 1$ wird, andererseits $\frac{\sin(ma)}{\sin a} = m$ (§ 17 (I.) S. 210), so hat man den Satz:*)

(U.) „Ist m eine gerade natürliche Zahl, so sind:

$$\cos(ma) \quad \text{und} \quad \frac{\sin(ma)}{m\sin a\cos a}$$

ganze Funktionen $\frac{m^{\text{ten}}}{2}$ resp. $\left(\frac{m}{2}-1\right)^{\text{ten}}$ Grades von $\sin^2 a$, deren konstantes d. h. von $\sin a$ freies Glied gleich 1 ist."

Nun verschwindet $\cos ma$ für die m innerhalb des Intervalles $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ gelegenen und voneinander verschiedenen Winkel $a = \pm\frac{\pi}{2m} \pm \frac{k\,2\pi}{m}\left(k = 0, 1, 2 \ldots \frac{m-2}{2}\right)$, oder, was dasselbe ist, für die $\frac{m}{2}$ Wertpaare $a = \pm\frac{\pi}{2m}, \pm\frac{3\pi}{2m}, \ldots \pm\frac{(m-1)\pi}{2m}$, für die $\sin^2 a$ die $\frac{m}{2}$ verschiedenen Werte annimmt:

*) *Ein entsprechender* Satz gilt auch für ungerade m, doch *bedarf man desselben* für das Folgende nicht.

$$\sin^2\frac{\pi}{2m},\ \sin^2\frac{3\pi}{2m},\ \ldots,\ \sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}.$$

Aus § 7 (10), S. 65 folgt, dass, wenn eine ganze (sc. nicht identisch verschwindende) Funktion $f_n(z)$ n^{ten} Grades mit dem konstanten Gliede 1 für die n verschiedenen Werte $z = z_1$, $z_2 \ldots$, z_3 verschwindet, die Identität besteht:

$$(104) \qquad f(z) = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Mit Rücksicht hierauf geht aus (U.) die Zerlegung hervor:

$$(105a) \qquad \cos ma = \left(1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\ldots$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right) (m \text{ gerade}).$$

Ähnlich verschwindet $\dfrac{\sin ma}{m \sin a \cos a}$ für die $\dfrac{m}{2} - 1$ verschiedenen Werte von $\sin^2 a$:

$$\sin^2\frac{2\pi}{2m},\ \sin^2\frac{4\pi}{2m},\ \ldots\ \sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m},$$

und es entsteht die zu (105a) parallele Zerlegung:

$$(105b) \qquad \frac{\sin ma}{m \sin a \cos a} = \left(1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\ldots$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

Setzt man jetzt $ma = x$, so nehmen die Zerlegungen (105a), (105b) den Charakter endlicher Produktentwickelungen *für* sin x, cos x an (m gerade):

$$\left\{\begin{aligned}
&(106\text{a}) \qquad \cos x = \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots \\
&\qquad\qquad \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right), \\
&(106\text{b}) \quad \sin x = m \sin \frac{x}{m} \cos \frac{x}{m}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots \\
&\qquad\qquad \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).
\end{aligned}\right.$$

Für sehr grosse Werte von m würden $\frac{x}{m}, \frac{\pi}{2m}, \frac{2\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m} \cdots$ sehr klein werden, man könnte also nach § 5 (I.), S. 46 mit starker Annäherung die Sinus jener Argumente mit den letzteren vertauschen, und da sich zugleich $m \sin \frac{x}{m} \cos \frac{x}{m}$ beliebig der Grösse x nähert, würde man zu den unbegrenzten Entwickelungen geführt:

$$\left\{\begin{aligned}
\cos x &= \left\{1 - \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{2x}{3\pi}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{2x}{5\pi}\right)^2\right\}\cdots \\
\sin x &= x\left\{1 - \left(\frac{2x}{2\pi}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{2x}{4\pi}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{2x}{6\pi}\right)^2\right\}\cdots
\end{aligned}\right.$$

Bei weiterem Fortschreiten würden sich aber Argumente einstellen, die nicht mehr klein genug sind, um sie mit ihren Sinus verwechseln zu können, und man würde so auf ähnliche Schwierigkeiten stossen, wie bei der Entwickelung von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in eine Reihe (§ 12, S. 114). Es wird daher wieder

erforderlich sein, beim Übergang zu den genannten Argumenten die Ausdrücke (106a) (106b) in zwei Grenzen einzuschliessen, die eine Diskussion für ein unbegrenzt wachsendes m gestatten.

Man gelangt zu zwei, zu (106a), 106b) analogen Entwickelungen, wenn man statt der Sinus innerhalb der einzelnen Klammern die entsprechenden Tangens einführt. Für irgend zwei Argumente u, v ist identisch:

$$(107)\quad 1-\frac{\sin^2 u}{\sin^2 v}=\cos^2 u+\sin^2 u-\frac{\sin^2 u}{\sin^2 v}=\cos^2 u\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2 u}{\operatorname{tg}^2 v}\right).$$

Somit gehen den Entwickelungen (106a), (106b) die folgenden zur Seite:

$$(108a)\quad \cos x=\cos^m\frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tg}^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right),$$

$$(108b)\quad \sin x=m\operatorname{tg}\frac{x}{m}\cos^m\frac{x}{m}\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{m}}{\operatorname{tg}^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

Hier gehören die Argumente $\frac{\pi}{2m}, \frac{2\pi}{2m}, \cdots \frac{m-1}{2}\cdot\frac{\pi}{m}$ alle dem ersten Quadranten an, und das nämliche gilt für $\frac{x}{m}$, *sobald man* m hinreichend gross wählt.

Nun besteht zwischen den drei Quotienten $\frac{\sin u}{\sin v}, \frac{u}{v}, \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} v}$, wo u, v dem ersten Quadranten angehören sollen, eine einfache Doppelungleichung. Sei zuerst $u > v$, also $u = v + h \left(0 < v < v + h < \frac{\pi}{2}\right)$, so wird nach dem Mittelwertsatz:

$$\sin(v + h) = \sin v + h \cos(v + h\vartheta)\,(0 < \vartheta < 1),$$

$$\frac{\sin(v + h)}{\sin v} = 1 + \frac{h}{v} \cdot \frac{v}{\sin v} \cos(v + h\vartheta);$$

da aber:

$$\frac{v}{\sin v} \cos(v + h\vartheta) < \frac{v}{\operatorname{tg} v} < 1,$$

so wird:

$$\frac{\sin(v + h)}{\sin v} < 1 + \frac{h}{v} \left(0 < v < v + h < \frac{\pi}{2}\right).$$

Durch Vergleichung der reziproken Werte folgt hieraus, wenn $0 < v - h < v < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\sin(v - h)}{\sin v} > 1 - \frac{h}{v}.$$

Entsprechend erhält man für $0 < v < v + h < \frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{tg}(v + h) = \operatorname{tg} v + \frac{h}{\cos^2(v + \vartheta h)}\,(0 < \vartheta < 1),$$

$$\frac{\operatorname{tg}(v + h)}{\operatorname{tg} v} = 1 = \frac{h}{v} \cdot \frac{v}{\operatorname{tg} v \cos^2(v + \vartheta h)};$$

da aber:

$$\frac{v}{\operatorname{tg} v \cos^2(v + \vartheta h)} > \frac{v}{\operatorname{tg} v \cos^2 v} > \frac{v}{\sin v \cos v} > \frac{v}{\sin v} > 1,$$

so wird:

$$\frac{\operatorname{tg}(v+h)}{\operatorname{tg} v} > 1 + \frac{h}{v}\left(0 < v < v+h < \frac{\pi}{2}\right),$$

und hieraus wieder umgekehrt:

$$\frac{\operatorname{tg}(v-h)}{\operatorname{tg} v} < 1 - \frac{h}{v}\left(0 < v-h < v < \frac{\pi}{2}\right).$$

Für $u > v$ werden $\frac{\sin u}{\sin v}$, $\frac{u}{v}$, $\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} v}$ grösser als 1, für $u < v$ kleiner als 1.

Somit gilt, wenn u, v irgend zwei Argumente des ersten Quadranten sind, gleichgültig, ob $u \gtrless v$, die Doppelungleichung:

$$(109) \qquad \left|1 - \frac{\sin^2 u}{\sin^2 v}\right| < \left|1 - \frac{u^2}{v^2}\right| < \left|1 - \frac{\operatorname{tg}^2 u}{\operatorname{tg}^2 v}\right|.$$

Dies werde zuvörderst auf die Entwickelungen von cos x in (106a), (108a) angewendet. Man darf sich offenbar auf positive x beschränken. In (108a) ist noch der Faktor $\cos^m \frac{x}{m}$ zu berücksichtigen, der < 1, aber, wie aus § 17 IV, S. 214 hervorgeht, bei beliebig wachsendem m den Grenzwert 1 hat. Der Überschuss $1 - \cos^m \frac{x}{m} = \varepsilon_m$ lässt sich mit Hilfe des Mittelwertsatzes leicht abschätzen.

Man hat: $\cos^m \frac{x}{m} = 1 - x \cos^{m-1} \frac{\vartheta x}{m} \sin \frac{\vartheta x}{m} (0 < \vartheta < 1)$,

mithin, sobald $\frac{x}{m} < \frac{\pi}{2}$:

$$(110a) \qquad \varepsilon_m = 1 - \cos^m \frac{x}{m}$$

$$= x \cos^{m-1} \frac{\vartheta x}{m} \sin \frac{\vartheta x}{m} < x \sin \frac{\vartheta x}{m} < x \sin \frac{x}{m} < \frac{x^2}{m}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

(111a) $$\Pi_m = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$
$$\left(1-\frac{4x^2}{(m-1)^2\pi^2}\right) \quad (m \text{ gerade}),$$

und nimmt x vorerst im ersten Quadranten an, so sind alle Quotienten $\frac{\frac{x}{m}}{\frac{\pi}{2m}} = \frac{2x}{\pi}$, $\frac{\frac{x}{m}}{\frac{3\pi}{2m}} = \frac{2x}{3\pi}$ etc. < 1; dann geht aus (109) und (106a), (108a) hervor, dass:

(112a) $$\cos x < \Pi_m < \frac{\cos x}{1-\varepsilon_m},$$

und hieraus folgt, dass $\lim_{m=\infty} \Pi_m = \cos x$ ist, mit dem Fehlergesetz:

(113a) $$\cos x = \Pi_m(1-\varepsilon'_m),\ 0 < \varepsilon'_m < 1,\ \varepsilon'_m < \varepsilon_m,$$

wo ε_m durch (110a) abgeschätzt wird.

Liegt x zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$, so wird der erste Faktor in Π_m negativ, $\cos x$ desgleichen, in (112a) vertauschen sich beide Seiten der Doppelungleichung, während (113a) unverändert bleibt. Dasselbe wiederholt sich, wenn x in einem Intervalle von der Form $\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{(4n+3)\pi}{2}\right)$ gelegen ist, dagegen der ursprüngliche Fall, wenn x den dazwischen liegenden Intervallen angehört.

Um die analoge Entwickelung für $\sin x$ durchzuführen, hat man zuvor noch die Annäherung des in (108b) auftretenden Faktors $m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\cos^m\frac{x}{m}$, der für den Augenblick mit $\varphi(x)$ bezeichnet sei, an den Grenzwert x (für $\lim m = \infty$) *genauer festzustellen.*

Nach dem einmal erweiterten Mittelwertsatz wird:

$$\varphi(x) = x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(\vartheta x),\ 0 < \vartheta < 1.$$

Es ist aber:

$$\varphi'(x) = \cos^{m-2}\frac{x}{m}\left(1 - m\sin^2\frac{x}{m}\right),\ \varphi'(0) = 1,$$

$$\varphi''(x) = \cos^{m-3}\frac{x}{m}\sin\frac{x}{m}\left(-3 + \frac{2}{m} + m\sin^2\frac{x}{m}\right).$$

Somit kommt:

$$(110b)\quad \begin{cases} x - \varphi(x) = \dfrac{x^2}{2!}\left(3 - \dfrac{2}{m} - m\sin^2\dfrac{\vartheta x}{m}\right)\cos^{m-3}\dfrac{\vartheta x}{m}\sin\dfrac{\vartheta x}{m} \\ \qquad\qquad < \dfrac{3x^2}{2}\sin\dfrac{\vartheta x}{m} < \dfrac{3x^2}{2}\cdot\dfrac{x}{m}, \\ \text{oder:} \\ \varphi(x) = x(1 - \eta_m),\quad \eta_m < \dfrac{3x^2}{2m},\quad \lim\limits_{m=\infty}\eta_m = 0. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(111b)\quad \Pi'_m = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{m-2}{2}\right)^2\pi^2}\right),$$

(m gerade),

so kommt auf Grund von (106b), (108b), (109), indem man sich wiederum auf positive x beschränken darf, die Doppelungleichung:

$$(112b)\qquad \frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}\cos\frac{x}{m}} < \Pi'_m < \frac{\sin x}{m\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{m}\cos^m\frac{x}{m}}$$

in allen Fällen, wo x einem Intervalle von der Form $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ angehört, während in den anderen Fällen *nur beide* Seiten von (112b) zu vertauschen sind. Somit

hat $x\,\Pi'_m$ für $\lim m = \infty$ den Grenzwert $\sin x$. Gemäss (112b), (110b) ergiebt sich die Fehlerabschätzung:

(113b) $\sin x = x\,\Pi'_m(1 - \eta'_m)$, $\eta'_m < \eta_m$, $\lim \eta'_m = 0$,

wo η_m (110b) zu entnehmen ist.

Damit ist das von Euler erhaltene, von Cauchy mit Rücksicht auf die Konvergenztheorie strenger begründete Resultat bewiesen:

(W.) „Es lassen sich $\cos x$ und $\sin x$ durch die beliebig weit fortsetzbaren Produktentwickelungen darstellen:

$$\left\{\begin{aligned} &(114a)\quad \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \\ &\qquad\qquad \left(1 - \frac{4x^2}{(m-1)^2\pi^2}\right)(1 - \varepsilon'_m), \\ &(114b)\quad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots \\ &\qquad\qquad \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{m-2}{2}\right)^2\pi^2}\right)(1 - \eta'_m), \end{aligned}\right\} (m \text{ gerade}),$$

wo ε'_m, η'_m positive Grössen < 1 sind, die für $m = \infty$ verschwinden, und die die Abschätzungen $\varepsilon'_m < \varepsilon_m$, $\eta'_m < \eta_m$ (110a), (110b) gestatten."

Indessen lassen sich die Funktionen $\cos x$, $\sin x$ auch allein durch die unendlichen Produkte (ohne Kenntnis eines Restfaktors):

$$\left\{\begin{aligned} &(115a)\quad \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots \\ &(115b)^*)\quad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \end{aligned}\right.$$

*) Setzt man in Formel (115b) [resp. (114b)] $x = \frac{\pi}{2}$, so kommt:

definieren. Denn die Produkte der Klammerfaktoren sind beide von der Form $(1 - u_0)(1 - u_1) \ldots$, wo die u positiv sind und die Reihen der u (abgesehen von einem Faktor $\frac{x^2}{\pi^2}$ resp. $\frac{4x^2}{\pi^2}$) eine hyperharmonische Reihe (37), S. 334, mit $\sigma = 2$ resp. ein Teil einer solchen sind, also konvergieren. Demnach konvergieren gemäss (T.) S. 379 jene Produkte unbedingt*), und zwar auf Grund von (114a), (114b) gegen cos x resp. sin x.

Somit gilt als Ergänzung von (W.):

(W'.) „Es lassen sich cos x und sin x auch durch die unendlichen Produkte (115a), (115b) darstellen oder definieren."

Ersichtlich sind diese Darstellungen der analytische Ausdruck der Thatsache, dass cos x für alle Werte:

$$x = \pm k\frac{\pi}{2} (k = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 4}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 9}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 16}\right) \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \ldots,$$

oder, wenn man auf beiden Seiten den reziproken Wert nimmt:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \ldots.$$

Diese Entwickelung verdankt man Wallis; man hätte sie auch aus (115a) [resp. (114a)] ableiten können, wenn man beiderseits mit $1 - \frac{2x}{\pi}$ dividiert, und x gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergieren lässt.

*) Denkt man sich dagegen jeden Klammerfaktor, wie weiter unten, in 2 in x lineare Faktoren zerlegt, so erscheint jedes der beiden unendlichen Produkte in der Gestalt:

$$(1 + u_0)(1 - u_0')(1 + u_1)(1 - u_1') \ldots,$$

wo die Reihen der positiven u und u' als Teile von harmonischen *Reihen* divergieren; mithin konvergiert dann jedes der beiden Pro*dukte gemäss* (VI.), S. 381, bedingt.

verschwindet und nur für diese, und entsprechend sin x*) für alle Werte $x = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) und nur für diese.

Aus (114a), (114b) entnimmt man unschwer die Eigenschaften $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$, woraus die der „Periodizität“:

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

unmittelbar folgt.

Man zerlege nemlich $\Pi_m(x) = \Pi_m$ (111a), wie folgt:

$$\text{(111a)} \quad \Pi_m(x) = \left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\ldots\left(1+\frac{2x}{(m-1)\pi}\right) \cdot \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\ldots\left(1-\frac{2x}{(m-1)\pi}\right).$$

Hier ersetze man x durch $x+\pi$. Dann geht in der oberen Zeile von (111a) jeder Faktor $1+\frac{2x}{k\pi}$ ($k = 1, 3, 5, \ldots$) über in $\frac{k+2}{k}\left(1+\frac{2x}{(k+2)\pi}\right)$, während in der unteren Zeile $1-\frac{2x}{\pi}$ übergeht in $-\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)$, jeder weitere Faktor $1-\frac{2x}{k\pi}$ ($k = 3, 5, \ldots$) in $\frac{k-2}{k}\left(1-\frac{2x}{(k-2)\pi}\right)$. Fasst man zusammen, so ergiebt sich:

---

*) Hierauf beruht eine einfachere Methode, um zu der Produktentwickelung von sin x — und, mittels der Relation:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

auch von cos x — zu gelangen. Man verfahre wie in § 5, setze:

$$\frac{1}{2}\sin x = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi-x}{2},$$

wende auf jeden der beiden Faktoren von neuem die Halbierung des Argumentes an u. s. w. Schliesslich gehe man, auf Grund von § 5 (I.) von den Sinus rechterhand zu deren Argumenten über.

Indessen ist die im Texte befolgte Methode in mancherlei Hinsicht *instruktiv*.

$$(116a)\quad \Pi_m(x+\pi) = -\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}} \cdot \frac{1+\frac{2x}{(m+1)\pi}}{1-\frac{2x}{(m-1)\pi}} \cdot \Pi_m(x).$$

Da hier der Faktor von $\Pi_m(x)$ für $m = \infty$ den Grenzwert -1 besitzt, so folgt mit Rücksicht auf (114a) in der That: $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

Hinsichtlich $\sin x$ zerlege man analog $x\Pi'_m(x) = x\Pi'_m$ (111b):

$$(111b)\quad x\Pi'_m(x) = x\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\dots\left(1+\frac{x}{l\pi}\right)\left(l=\frac{m-2}{2},\ m \text{ gerade}\right).$$
$$\cdot\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2x}\right)\dots\left(1-\frac{x}{l\pi}\right)$$

Vermöge der Substitution von $x+\pi$ statt x geht in der oberen Zeile von (111b) x über in $\pi\left(1+\frac{x}{\pi}\right)$, jeder weitere Faktor $1+\frac{x}{i\pi}$ $(i=1,2\dots)$ in $\frac{i+1}{i}\left(1+\frac{x}{(i+1)\pi}\right)$, dagegen in der unteren Zeile $1-\frac{x}{\pi}$ in $-\frac{1}{\pi}x$, jeder weitere Faktor $1-\frac{x}{i\pi}$ $(i=2,3,\dots)$ in $\frac{i-1}{i}\left(1-\frac{x}{(i-1)\pi}\right)$. Die Zusammenfassung liefert:

$$(116b)\quad (x+\pi)\cdot\Pi'_m(x+\pi) = -\frac{l+1}{l}\frac{1+\frac{x}{(l+1)\pi}}{1-\frac{x}{l\pi}} \cdot x\Pi'_m(x),$$
$$\left(l=\frac{m-2}{2},\ m \text{ gerade}\right),$$

wo wiederum der Faktor von $x\Pi'_m(x)$ für $m=\infty$ den Grenzwert -1 besitzt, sodass mit Rücksicht auf (114b) in der That: $\sin(x+\pi) = -\sin x$ wird.

Ähnlich kann man aus (114a), (114b) direkt Beziehungen, wie $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$, und andere *herleiten.*

Umgekehrt möge die Relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (s. die Anm. auf S. 267, § 20) dazu dienen, um den Grenzwert der hyperharmonischen Reihe (37), S. 334, für $\sigma = 2$ zu bestimmen. Bildet man $(\Pi_m)^2 + (x\Pi'_m)^2 - 1$, und entwickelt nach Potenzen von x^2, so tritt als erstes Glied x^2 auf, multipliziert mit:

$$1 - \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right).$$

Da dieser Koeffizient für $m = \infty$ den Grenzwert Null haben muss, so entsteht:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots, \tag{117}$$

und da:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = (1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots) + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right),$$

so folgt, wenn der Grenzwert der linken Seite mit S bezeichnet wird:

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}, \quad S = \frac{\pi^2}{6}:$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots, \tag{117'}$$

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots,$$

Formeln, die ebenfalls Euler auf dem eingeschlagenen Wege erhalten hat.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Soeben erschien:

Elemente der Stereometrie

von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller.

I. Band: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren. Preis broschiert Mk. 6.—, gebunden Mk. 6.60.

II. Band: **Die Berechnung einfach gestalteter Körper.** Mit 156 Figuren. Preis broschiert Mk. 10.—, gebunden Mk. 10.80.

III. (Schluss-) Band erscheint voraussichtlich im Herbst 1901.

Dieses Werk dürfte wohl einzig in seiner Art dastehen, denn in so umfassender und gründlicher Weise ist die Stereometrie noch nicht behandelt worden. Das Wort „elementar" ist dabei so zu nehmen, dass die höhere Analysis und im allgemeinen auch die analytische Raumgeometrie ausgeschlossen bleiben, während die synthetische neuere Geometrie in den Kreis der Betrachtungen hineingezogen wird, soweit es die Methoden der darstellenden Geometrie erfordern.

Alle Figuren, auf die ganz besondere Sorgfalt verwendet worden ist, sind streng konstruiert und fast jede ist ein Beispiel der darstellenden Geometrie.

Trotz des elementaren Charakters geht diese neue Stereometrie weit über das übliche Ziel hinaus, giebt neben den Lehrsätzen umfangreiches Übungsmaterial, betont die Konstruktion und die Berechnung gleichmässig und wird somit an Vielseitigkeit und Gediegenheit des Inhalts wohl von keinem der hervorragenderen Lehrbücher erreicht.

Ausführliche Prospekte unberechnet und postfrei.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Kleine Leitfäden der Mathematik

aus der **„Sammlung Göschen“.**

Jedes Bändchen elegant gebunden 80 Pfennig.

Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert.

Beispiel-Sammlung zur **Arithmetik** und **Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert.

Ebene Geometrie mit 115 zweifarbigen Figuren von Prof. G. Mahler.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 69 ein- und zweifarbigen Figuren von Dr. Gerhard Hessenberg.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. Glaser.

Niedere Analysis mit 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck.

Analytische Geometrie der Ebene mit 45 Figuren von Prof. Dr. M. Simon.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 63 Figuren von Prof. Dr. Friedr. Junker.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 87 Figuren von Prof. Dr. Friedr. Junker.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 57 Figuren von Dr. K. Doehlemann.

Formelsammlung und **Repetitorium** der **Mathematik** mit 20 Figuren von Prof. Bürklen.

Mathematische Geographie zusammenhängend entwickelt und mit geordneten Denkübungen versehen von Kurt Geissler.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Prof. Dr. C. Reinhertz.

Astronomie mit 36 Abbildungen und einer Karte von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus.

Astrophysik mit 11 Abbildungen von Professor Dr. Walter F. Wislicenus.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

Form 410